DEL MOVIMENTO DELL' ACQUE

TRATTATO GEOMETRICO

DEL P. ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

Mattematico dell' Altezza Reale di Toſcana, e pubblico Profeſſore delle ſcienze mattematiche nello Studio di Piſa.



PREFAZIONE



Eco stesso più volte sono andato pensando, onde avvenisse, che da tanti acutissimi ingegni essendo stata in questi ultimi secoli la scienza del moto illustrata, e di sì belle, e profonde speculazioni arricchita, tuttavolta la cognizione del moto dell' acque, tanto necessaria al ben pubblico, non abbia fatti sì gran progressi, in paragone dell' avanzamento, che intanto si ritrova aver fatta la stessa scienza del moto applicato ad altre materie, che paiono di minore importanza. La Teoria del moto de' gravi cadenti, sottilmente inventata dal gran Galileo, dopo lunghi, e rigorosi esami, si è trovata sodamente resistere al cimento della ragione, e della sperienza, purchè si volesse astrarre (come espressamente egli avvisò) dagli accidentali impedimenti delle resistenze, che si affacciano a ritardare il moto de' mobili, ed alterarne in gran parte la proporzione. Queste stesse resistenze, secondo varie ipotesi, che potessero sembrare più verisimili, sono state poi calcolate dal Nevvton dal Leibnizio, dal Varignone, dall' Ermanno, e determinate quindi le leggi, secondo cui il moto de' gravi, o naturalmente cadenti, o scagliati in alto, regolar si dovesse. Le proprietà della forza centrifuga, scoperte felicemente da Cristiano Ugenio, hanno molto contribuito ad illustrare questa scienza del moto, e ci hanno fatti accorgere, che ne' moti curvilinei essa sempre incontrandosi, veniva contrabbilanciata da qualche altra segreta forza analoga alla gravità, e detta comunemente centripeta, *perchè continuamente spinge il mobile verso qualche centro, ritirandolo dalla tangente, che per altro seguir dovrebbe, sulla curva da lui descritta, ed obbligandolo a proseguirla. Così le Teorie de' moti celesti sono state perfezionate, ed a suoi veri principj ricondotte, conciliando l' Astronomia colla Fisica, tra le quali due scienze, già da molti secoli, non parea che passasse troppo buona corrispondenza. E' ben vero, che in questa parte, se i nostri antichi non ebbero molta felicità, non avendo però mancato, nè di sollecitudine in osservare, nè d' ingegno per inventare ripieghi, tanto si erano adoperati in congegnare deferenti, epicicli, ed*

altri tali arzigogoli, che a un dipresso venivano pure a capo dell' intento loro, calcolando, assai giustamente, per l'uso da essi bramato, gli aspetti varj de' Pianeti, le diverse apparenze della Luna, gli equinozj, i solstizj, le ecclissi, predicendole molto tempo avanti, e determinandone la quantità, e la durazione con non molto divario dal vero tempo, e dalle esatte misure, che in oggi più precisamente si accertano. Ma nella scienza dell'acque, dopo che il P. Abate Castelli fece osservare, che nella misura loro dovea farsi entrare la velocità, con troppo grossolano errore da' nostri buoni vecchi non avvertita; e dopo di avere dimostrato, che le sezioni d'un medesimo fiume, nello stato di permanenza, erano proporzionali reciprocamente alle loro velocità, con pochi Corollarj da ciò dedotti; è bensì stata applicata all'acque dal Torricelli, dal Baliani, dal Guglielmini, e dall'Ermanno la dottrina del moto accelerato de' gravi cadenti; ma per verità non si è ancora bastevolmente illustrata questa materia, nè secondo i suoi veri principj, nè con qualche ipotesi corrispondente agli effetti, e però equivalente al vero artifizio praticato dalla natura in condurre i fiumi, e i torrenti dall'alte cime de' monti, in cui hanno la sorgente loro, al vasto seno del mare, dove trovano il loro termine. Quindi l'incertezza de' ripari, che opporre si debbono al corso di essi, per impedire i disordini, che spesso fanno a danno delle campagne. Quindi la perplessità dell' esito felice, o pernicioso, che possa avere il progetto di unire più fiumi in un solo, e di deviare un influente dal suo recipiente, o di aprire ad essi altra strada, secondo che talvolta occorre, per rimediare a' gravissimi sconcerti, a cui le intere Provincie soggette si trovano. E sembra pure la strana cosa, che di soggetti così lontani da noi, come sono Giove, e Saturno, sappiamo tanto tempo avanti determinare i moti, prevederne le congiunzioni, calcolarne l' eclissi, che ricevono da' loro Satelliti, e quali di questi da qui a due mil' anni debbano in un tal punto di tempo essere da' loro primarj occultati, e quali rimanere scoperti, e verso qual banda ritrovarsi disposti; laddove de i moti dell'acque, che tutto giorno abbiamo sotto gli occhi, e potiamo così da vicino contemplare a bell'agio, senza bisogno di cannocchiale, che ce li scuopra, ne siamo così scarsamente informati, che non ne potiamo accertare gli effetti, che siano per fare da qui a pochi mesi, non che mille, o cent' anni avanti: con tutto che ciò dovrebbe assai più interessarci, che la situazione dell' anello di Saturno nel punto del solstizio estivo dell' ultim' anno di questo secolo.

Voglio ben credere, che in gran parte debba scemare la maraviglia di ciò, riflettendo che i moti celesti dipendono da cagioni universali, necessarie, e costanti, nè soggette a quelle vicende, che qui sotto la Luna si osservano: laddove il corso de' fiumi riceve grande alterazione dalla varia intemperie delle stagioni, e talvolta dall' arbitrio degli uomini, che pongono bene spesso, o a bella posta, o ancora non accorgendosene, degl' impedimenti, che ritardano, o divertono il moto dell' acque, secondo i loro particolari interessi. So ancora, che forse, con tutta la cognizione, che abbiamo del moto de' Pianeti, le nostre predizioni non saranno poi tanto esatte, che non vi si trovino realmente di grandissimi svari, i quali però in tanta lontananza comparirano all' occhio, perchè quando ancora siasi posto il centro d' un Pianeta tremila miglia lontano dal vero sito, non ci saremo finalmente ingannati, che di un minuto secondo nella distanza di 180 mila semidiametri terrestri, che possono correrv tra-

vi tra la terra, ed il sito di quello. In fatti non abbiamo così perfetta la Teoria della Luna, come quella di Giove, per esser quella tanto più vicina alla terra, onde abbiamo occasione di accorgerci meglio delle sue irregolarità, le quali non ci si scoprirebbero così manifestamente da maggior lontananza; e così, se da lungi solamente mirassimo sulla superficie di qualche immenso globo da noi separato, scorrere de' fiumi, ci sembrerebbe d' averne ottenuta una piena cognizione, numerandoli, e distinguendoli ad uno ad uno, fissandone la posizione; e paragonandone insieme la grandezza senza scoprirne altra particolarità; ma vedendoli ne' nostri stessi paesi, e risentendone tanti notabili effetti, che hanno gran rapporto al comodo del nostro vivere, non potiamo rimanere soddisfatti di quella poca cognizione, che ce ne danno le scarse osservazioni fattevi sopra, e quelle universali leggi del moto de' gravi, che da tanti celebri Mattematici sono finora generalmente state dimostrate, senza distinguere tra' corpi solidi, e fluidi, e senza chiaramente discernere ciò che aggiunga la ragione della fluidità alle comuni passioni de' corpi pesanti.

Tutto ciò pertanto non serve a giustificare la penuria, in cui siamo, di ben fondate, e sicure leggi Idrostatiche, e molto meno ad appagare il desiderio, che si ha comunemente di vedere una volta ben perfezionato il sistema del moto dell' acque, per la pubblica utilità, che unitamente con esso verrebbe a promuoversi; che però sarebbero molto benemeriti, non solo della Repubblica Letteraria, ma di tutto il mondo, que' Mattematici, che ad illustrare materia così importante volgessero tutte le forze dell' ingegno loro, e vi applicassero i metodi più profondi, tanto coltivati da essi in quest' ultimo secolo, ed a sì belle, e sottili ricerche adattati. Ma soprattutto converrebbe prima, con pubblica autorità, da persone pratiche, fedeli, e diligenti, che unicamente la pura verità de' fatti cercassero, e non da ingegno, parzialità, o interesse alcuno prevenute fussero, far fare varie sperienze, e numerose osservazioni esattissime, degli accidenti, che occorrono nel corso de' fiumi, circa l' altezza delle maggiori escrescenze, e le varie circostanze, che le accompagnano; e circa i limiti della bassezza maggiore, a cui si riducano nelle stagioni più secche; e circa la velocità, con cui scorre la superficie di essi in varj siti, secondo che più si scostano dalla origine loro; e non solamente nel filone, ma ancora più vicino alle ripe; e ciò in diversi stati di ripienezza di esso fiume, e di più in varie profondità di ciascuna sezione, e prima, e dopo il concorso de' loro influenti; ed altre simili particolarità, che possono dare gran lume, per dichiarare questa oscurissima natura del moto dell' acque, e dare occasione da specularvi sopra, e rinvenirne i veri principj. Un' abbondante raccolta di queste notizie di fatto, ben sicure, e con replicati esperimenti accertate, oh quanto buon capitale sarebbe, per accingersi all' impresa tanto necessaria, e tanto bramata, di stabilire, e fondare le massime più essenziali, che mancano a questa scienza! Ma non può intraprendersi da un particolare nè la fatica, nè la spesa, che richieggono tante osservazioni: onde conviene aspettare la mano benefica di qualche Principe, a cui sia a cuore una sì grand' opera, e la voglia coll' autorità sua, e col suo polso promuovere.

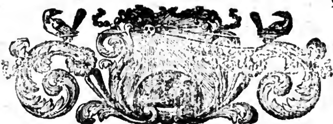
Il principale difetto dell' Idrostatica si è, il non essere ancora certificati, con qual legge proceda la velocità dell' acque correnti. Il P. Abate Castelli suppose, che la velocità fusse proporzionale all' altezza del corpo d' acqua corrente in un alveo, e cercò in varie maniere dimostrare un tale principio, siccome poi

poi tentò la medesima cosa il Borelli, e volle ancora il Cassini persuaderlo con alcune sperienze, ma non riuscì a veruno di essi di stabilirlo, insinuandosi delle petizioni di principio nelle ragioni addotte da quelli, ed alcune non avvertite circostanze rendendo equivoci gli sperimenti di questo. Il Torricelli considerò dover crescere la velocità in ragione sudduplicata dell' altezze, da cui l' acqua è caduta: ciò che più universalmente fu abbracciato, come assai conforme alle sperienze dell' acqua, che si fa uscire da varj emissari de' vasi, che la conservano, posti in diverse altezze sotto il livello dell' acqua stagnante in essi vasi. Il De Scales, ed il Guglielmini seguitarono questa dottrina, siccome ancora l' Ermanno, il Gravesand, ed altri che hanno trattato di queste materie; ma sarebbe da desiderarsi, che le sperienze fatte ne' vasi, potessero con eguale facilità replicarsi negli alvei de' fiumi, perchè il divario, dello stare l' acqua stagnante sopra l' apertura, che gli dà l' esito, e del correre che fa attualmente l' acqua superiore a qualunque sezione d' un fiume, non desse sospetto, che il paragone fusse in qualche parte manchevole. Il determinare poi, che fa il Guglielmini la velocità ne' fiumi orizzontali, come se fusse in ragione sudduplicata dell' altezze medesime de' corpi d' acqua, che scorrono ne' loro alvei, patisce le sue difficoltà, perchè quindi ne seguirebbe (come ancora nella prima ipotesi del Castelli) che la superficie dell' acqua punto non si muovesse, come quella che non avendo altezza veruna, sarebbe priva d' ogni grado di velocità: il che ripugna a' sensi, che la scorgono visibilmente scorrere: e che vicino agli sbocchi, dove l' altezza de' fiumi diminuisce, senza molto alterarsi gli alvei loro in larghezza, minore velocità dovrebbe notarsi, che nelle parti superiori, e però minore quantità d' acqua scaricherebbero nel mare di quella, che ne ricevessero dalle sezioni precedenti; il che pure è un assurdo gravissimo.

Per tali ragioni io mi sono determinato a seguire da per tutto, senza distinzione di canali orizzontali, o inclinati la ragione sudduplicata dell' altezze, onde cade l' acqua, per la più legittima misura, che fin ora si abbia, delle velocità; non mettendo in conto le resistenze del fondo, e delle ripe; le quali in poca distanza da queste, e da quello possono avere il suo effetto, onde non alterano gran cosa il moto del corpo vivo dell' acqua corrente, ma solo, per dir così, la prima corteccia dell' acqua all' uno, ed all' altre immediatamente contigua, per quanto almeno tale resistenza può dipendere dal soffregamento coll' asprezze della terra, dell' arena, o della ghiaia, che compongono le parti del letto del fiume, coll' acqua, che sopra, o lungh' esse va strisciando: perchè circa il ritardamento, che può cagionare la varia loro positura obbligando l' acqua a mutare direzione, variamente riflettendola, e deviandola dal suo corso, ciò appartiene ad un altra ispezione, che non è stata da me del tutto in questo Trattato negletta, come vedrassi a suo luogo. Per altro io non voglio dissimulare, di non essermi sopra di ciò interamente appagato, essendomi passate spesso per la mente altre idee di nuove Ipotesi, le quali mi si rappresentavano in aria di maggiore verisimiglianza; ma non ho avuto ardire di adottarle, mancandomi le sperienze, che necessarie sarebbono per accertarsene. Può essere però, che una volta le proponga, come semplici ipotesi mattematiche, esaminando le conseguenze, che ne verrebbero, per farne poi il paragone colle osservazioni de' fiumi, quando potranno aversi in tale materia esatte abbastanza, da potersene fidare, per decidere della verità, o insussistenza delle medesime ipotesi.

tesi. Per ora non mi permettono le gravi occupazioni, che ho fra le mani, di potere stendere sopra di ciò i miei pensieri, anzi nè meno di poter dare l'ultima mano al presente Trattato, che io per me non averei voluto per ora pubblicare, se l'autorità di chi presiede alla pubblicazione di questa Raccolta, non mi avesse costretto a concedergliene l'arbitrio, tal quale mi ritrovava d'averlo scritto per uso de' miei scolari; che però se così rozzo, ed imperfetto vi comparisce avanti, o benigni Lettori, saprete compatirlo, e gradire il buon animo, che ho avuto di giovare al pubblico, esponendogli queste mie poche speculazioni, di cui sebbene una gran parte non ha da me avuto, se non l'ordine, e talvolta qualche nuova maniera di dimostrarle, essendo già inventate da chi prima di me ha illustrata questa materia; molte però affatto nuove ne incontreranno, degne di qualche osservazione, e non del tutto inutili allo scopo prefissomi di promuovere in qualche maniera questa scienza, e renderne non meno facile, che sicura l'applicazione alla pratica.





TRATTATO

DEL MOVIMENTO DELL' ACQUE

Libro Primo.

De principj più universali concernenti il moto de' fiumi principalmente di fondo orizzontale, loro flessuosità, confluenze, diramazioni, e varie velocità, prescindendo da qualunque particolare ipotesi circa la stessa.



DIFFINIZIONI.

I. PER *Letto regolare* de' fiumi s' intende qualsivoglia canale, il fondo di cui sia a un dipresso piano, senza notabili asprezze, parallelo, o inclinato che siasi all' orizzonte: e le ripe altresì piane, perpendicolari al fondo medesimo, e tra di loro egualmente distanti.

II. *Irregolare è il letto* de' fiumi, quando gli mancano le suddette condizioni, come per lo più accade, essendo il fondo scabro, con varj dossi, e gorghi quà, e là sparsi, e le ripe variamente inclinate, e con più tortuosità serpeggianti, e con varie misure di larghezze in siti diversi.

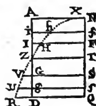
III. *Direzione* del fiume chiamasi la retta, secondo cui verso il mez-

zo

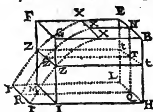
zo dell'alveo, e come dicesi, nel suo filone, con velocissimo corso l'acqua si muove.

IV. *Sezione d'un fiume* dicesi quella porzione di un piano, che segando il fiume perpendicolarmente alla sua direzione, resterebbe nel primo istante bagnata dall'acqua, come accaderebbe, se una cateretta lo tagliasse in un tratto, dividendolo in due parti, superiore, ed inferiore, ed esattamente occupandone tutta l'altezza, e larghezza sua, senza lasciarne trapelare gocciola alcuna: perchè allora ciò che rimarrebbe bagnato di essa cateratta nell'atto dello scendere sino al fondo [prima che si accumulasse altr'acqua ad accrescerne l'altezza] esprimerebbe appunto la sezione del fiume in quel sito.

V. Sapendosi per esperienza, che non tutte le parti dell'acqua, anche nella medesima sezione, si muovono colla stessa velocità; però tirata una perpendicolare, come sarebbe N Q al fondo del fiume, o alla base di qualunque sezione di esso, la qual perpendicolare esprimerà l'altezza dell'acqua, se si supporrà, che in un certo tempo, come sarebbe in un minuto secondo la particella dell'acqua superiore N venga in X, e quella che è in F venga in H, quella che è in S venga in V, e quella che è in Q si promuove in R, e così dell'altre; allora le rette N X, F H, S V, Q R rappresenteranno le velocità di ciascuna parte dell'acqua in varie altezze, e la figura N X H V R Q dirassi *Scala delle velocità* corrispondente alla detta altezza N Q nella sua sezione, e nel sito, in cui essa fu presa.



VI. Facendosi poi alla scala della velocità N X R Q un eguale rettangolo N Q D A applicato alla stessa altezza N Q; allora la sua larghezza N A, o pure Q D si dirà la *velocità media* della detta perpendicolare N Q, come quella che appunto è mezzana tra le minori N X, F H, e le maggiori Q R, S V; e dove il lato A D sega la linea X V R, come in Z, applicando la Z T parallela alla base, ritrovasi il punto T, dove realmente ha l'acqua una velocità T Z eguale alla media fra tutte l'altre, e tale, che se tutte le parti dell'acqua camminassero colla stessa velocità, egual copia in egual tempo si scaricherebbe per la detta altezza, come di fatto se ne scarica, andando ciascuna colla sua naturale velocità, che è varia in ogni punto; essendo il complesso delle linee disuguali N X, F H, S V, Q R, eguale al complesso delle linee N A, F I, S G, Q D le quali sono della stessa lunghezza.



VII. Nella stessa maniera, se in ciascuna perpendicolare della sezione d'un fiume B H L E si adatterà la sua scala delle velocità, la somma di tutte queste scale B H r X, N Q R X, E L r X rappresenterà la massa delle velocità corrispondenti a tutta la data sezione; ed immaginandosi un corpo prismatico B E F M I C H eguale al corpo B E X X r r L H, applicato all'istessa base B E L H, la cui altezza B C, overo H I; dirassi questa la *media velocità assoluta* di tutta la sezione, con cui se ciascuna particella di acqua si movesse, tanta copia se ne scaricherebbe, come di fatto dalla medesima sezio-

zione in un dato tempo si scarica con quelle disuguali velocità. Onde è chiaro, che chi notasse lo spazio N X fatto da una parte superficiale dell' acqua in un dato tempo, e raccogliesse tutta l'acqua, che in detto tempo esce dalla data sezione, in un vaso prismatico, la cui base uguagliasse appunto la detta sezione, quell'altezza, a cui si alzerebbe l'acqua in detto vaso, sarebbe la media velocità, di cui si parla, in relazione alla velocità superficiale rappresentata dalla lunghezza N X già notata.

CAPITOLO I.

Delle generali proprietà dell' acque correnti.

PROPOSIZIONE I.

Stando il fiume nel medesimo stato, egual copia d' acqua in un dato tempo scarica per una sezione, che per qualsivoglia altra, presa però in quel tratto, in cui il fiume non riceva altro influente, o non ne dirami dell' acqua di sua portata per qualche canale.

Ciò viene dimostrato dal P. Abate Castelli, ed è la sua proposizione fondamentale; ed è cosa quasi per se nota; perchè se per una sezione inferiore uscisse in un dato tempo maggiore copia d'acqua, che per la superiore non entra, non si manterrebbe il fiume nello stesso grado di ripienezza, ma verrebbe ad abbassarsi più di prima ne' siti intermedj: e se al contrario minore copia ne uscisse di quella, che vi entra, dovrebbe rigonfiare, ed alzarsi ne' siti di mezzo: il che è contro l'ipotesi; dunque la stessa quantità di acqua scarica il fiume per qualunque sua sezione, quando sta nel medesimo stato di bassezza, o di ripienezza, per tutto quel tratto, per cui cammina unito colle sole sue acque, senza ricevere altri influenti, o dividersi in altri rami; il che ec.

Corollario I.

Vale lo stesso di più fiumi, che si riuniscano in un tronco, o di uno stesso fiume, che dividasi in più rami, purchè si paragoni la somma delle sezioni de' canali separati, a quella sola, per cui passa l'acqua nel tronco unito; cioè, che stanti le medesime circostanze, la medesima copia d' acqua in un dato tempo passa per quelle, che per questa, quando non si faccia mutazione da uno stato, o grado di piena ad un altro.

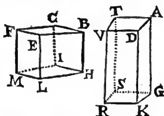
Corollario II.

Viceversa per sinattanto che la stessa copia d' acqua si scarica per qualunque sezione d'un fiume, ovvero per quella del tronco unito, e per la som-

somma delle sezioni de' canali separati, confluenti in uno stesso, o da quello derivanti, l'acqua sarà consistente nel medesimo grado di bassezza, o di ripienezza nell'alveo comune, e ne' rami divisi; purchè ciascuno da se scarichi copia eguale d'acqua come prima, e non solamente tutti insieme la stessa quantità totale: perchè ciò potrebbe derivare da più alterazioni, che avessero patito, uno per gonfiamento, l'altro per mancanza d'acqua, sicchè l'eccesso dell'uno compensasse il difetto dell'altro.

PROPOSIZIONE II.

Le velocità medie assolute in diverse sezioni dello stesso fiume, nelle circostanze della proposizione antecedente, sono reciproche alle medesime sezioni.



Siano le sezioni A D K G, B E L H e l'acqua ch'esce dalla prima in un minuto secondo di tempo sia raccolta in un prisma, che abbia la stessa base A D K G, ed in esso ascenda all' altezza A T; similmente quella, ch'esce dalla seconda si conformi in un prisma della stessa base B E L H eguale alla sua sezione, dove faccia l'altezza B C. Sarà dunque (per la definiz. 7.) la velocità media assoluta della prima sezione, alla velocità media assoluta della seconda, come A T, a B C (per la prop. anteced.) essendo eguali le moli d'acque A D R T, B E M C, sarà la base A D K G del primo prisma alla base del secondo B E L H, come reciprocamente l'altezza di questo B C all'altezza A T di quello (29. 11. elem.) dunque le dette sezioni sono reciprocamente, come le loro medie velocità assolute. Il che ec.

Corollario I.

Quindi è chiaro, che l'acqua d'un fiume nel passare da una sezione più larga ad una più stretta, o dovrà scavare per acquistarsi nell'altezza ciò che manca di capacità nella larghezza della sezione: o non potendo profondarsi, dovrà acquistarvi maggiore velocità il che facilmente potrà seguire, perchè passando da una maggiore larghezza ad una minore, vengono più parti dell'acqua a deviare dalla direzione parallela, che avevano, ed inchinarsi verso il filone del fiume, e così urtandosi insieme, e cozzando, possono accrescersi la velocità, come quando due palle cospirano da diverse bande a spingere una terza per una direzione di mezzo: secondo che intenderassi meglio, per le cose, che si diranno nel Capitolo quarto.

Corollario II.

Al contrario, passando l'acqua d'un fiume da una sezione stretta ad una più ampia, o dovrà diminuire l'altezza, riempiendo colle deposizioni il fondo, o dovrà ritardarsi, scemando la sua media velocità; il che può succede-

cedere, perchè spandendosi l'acqua in maggiore larghezza, viene a scomporre il suo moto, dividendolo in altre direzioni laterali, e così sfervando il movimento progressivo per la direzione del filone; o finalmente, in parte raffrenerà la velocità, ed in parte scemerà l' altezza [siccome nel caso del precedente Corollario potrà in parte accrescere l' altezza, ed in parte accrescere la velocità] tanto che sempre riesca la velocità media assoluta reciproca della capacità delle sezioni.

Corollario III.

Ancora paragonando insieme diversi fiumi, che sieno di eguale portata d'acqua, si verifica che le loro sezioni siano reciproche delle medie velocità assolute; siccome viceversa, quando in due fiumi si ritrovino le sezioni reciproche delle medie velocità, saranno essi di eguale portata d'acqua.

Corollario IV.

Ma quando fusse maggior ragione tra la sezione d'un fiume, e quella d' un altro, che non è reciprocamente della media velocità di questo alla media velocità di quello: o pure qualunque volta la velocità del primo alla velocità del secondo avesse maggior ragione, che la sezione del secondo alla sezione del primo, sarebbe di maggior portata d'acqua il primo fiume, che il secondo; perchè il prisma A D R T sarà maggiore del prisma B E M C, o sia che la base A D K G alla base B H L E abbia maggior ragione, che l'altezza B C all'altezza A T: o sia che l' altezza A T alla B C abbia maggior ragione, che la base B E L H alla base A D K G; esprimendo le basi di essi prismi le sezioni dell'uno, e dell' altro fiume, e le altezze essendo, come sopra, omologhe alle loro medie assolute velocità.

PROPOSIZIONE III.

Le quantità d' acqua, le quali colla stessa media velocità passano per disuguali sezioni d' uno stesso, o di più fiumi diversi, sono proporzionali alle stesse sezioni.

Imperocchè intendendo le dette quantità d' acqua ridotte in prismi, le cui basi sieno le stesse sezioni, l' altezze loro riusciranno eguali, essendo queste (per la def 7.) le misure delle medie assolute velocità, già supposte eguali: ma i prismi egualmente alti sono come le basi, cioè come le dette sezioni; dunque le moli d'acqua scaricate per varie sezioni d'uno stesso, o di diversi fiumi, colla stessa media velocità, sono proporzionali alle stesse sezioni. Il che si dovea dimostrare.

Corollario

Supposte le sezioni egualmente alte, ed egualmente veloci, le quantità d'acqua scaricate in un dato tempo, saranno come le mezzane larghezze di esse sezioni; ed essendo le sezioni egualmente larghe, le dette moli d' acqua saranno come le altezze; ed insomma, stante la medesima velocità, le

le moli d'acqua sono in regione composta dell'altezza, e della media larghezza delle sezioni, chiamasi *media larghezza* quella, che averebbero le sezioni ridotte in rettangoli, ritenuta la primiera loro altezza; imperocchè tali rettangoli hanno appunto la ragione composta dall'altezze, e delle larghezze.

PROPOSIZIONE IV.

Per le uguali sezioni scaricandosi diverse quantità di acqua, saranno queste proporzionali alle loro medie velocità.

Imperocchè conformandosi al solito le moli d'acqua, che nello stesso tempo si scaricano, in prismi eretti sopra basi eguali alle corrispondenti sezioni, le altezze saranno omologhe alle medie velocità, ma i prismi avendo basi eguali sono come l'altezze: dunque ec.

PROPOSIZIONE V.

Le moli d'acqua scaricate per diverse sezioni d'un medesimo, o di fiumi diversi, sono in ragione composta della ragione di esse sezioni, e di quella delle loro medie velocità.

Perchè ridotte le moli d'acqua ne' soliti prismi, le cui basi uguagliano le sezioni, e l'altezze denotano le medie velocità, è chiaro, avere questi la ragione composta di esse basi, e delle altezze, e però le moli d'acqua sono in ragione composta delle sezioni, e delle velocità suddette: il che ec.

Corollario.

Quindi le medesime quantità d'acqua sono altresì in ragione composta dell'altezze ragguagliate, delle medie larghezze, e delle medie velocità: di maniera che esponendo in numeri le proporzioni di questi termini, e moltiplicando insieme gli omologhi, cioè gli antecedenti tra loro, e li conseguenti altresì fra di essi, risulterà ne' prodotti numeri la ragione delle quantità dell'acqua.

Per dare un esempio in pratica. Sia la larghezza dell'acqua d'un fiume di 80. braccia, l'altezza di braccia 12. la velocità media tale, che in un minuto secondo si trasporti l'acqua per 3. braccia. Questi numeri moltiplicati insieme faranno 2880. Un altro fiume abbia di larghezza braccia 50. di altezza braccia 10., e la sua velocità muova l'acqua in un minuto secondo per braccia 2. questi ultimi 3. numeri moltiplicati insieme fanno 1000. e però diremo, che nel tempo, in cui il primo fiume scarica 2880 barili d'acqua, il secondo ne scarica solamente 1000., ed insomma, che le moli d'acqua scaricate nello stesso tempo da ambi i fiumi saranno in ragione de i detti numeri, cioè come 72. a 25. riducendola in minimi termini.

PROPOSIZIONE VI.

Le velocità medie sono in ragione composta di quella delle moli d'acqua scaricate nel

nel medesimo tempo, e della reciproca delle sezioni; siccome la ragione delle sezioni si compone di quella delle moli d'acqua scaricate nello stesso tempo, e della reciproca delle medie velocità.

Segue ciò dalla precedente, in vigore d'una proprietà generale delle proporzioni composte (che ben meriterebbe d'essere annoverata fra le proposizioni elementari) ed è, che se una proposta ragione A. B sia composta di quante si vogliano ragioni C. D, E. F, G. H; qualunque delle componenti si comporrà direttamente della proposta, e reciprocamente dell'altre; imperocchè sarà A. B, come il prodotto degli antecedenti C E G al prodotto de' conseguenti D F H, onde A D F H sarà eguale a B C E G; per la qual cosa, paragonando ora i termini di qualunque ragione componente, come sarebbe E. F, starà come A D H a B C G; cioè in ragione diretta di A a B, che era la proposta, e delle altre D. C; ed H. G, che sono le reciproche delle componenti: sicchè essendo la ragione delle moli d'acqua scaricate in egual tempo composta di quella delle sezioni, e di quella delle medie velocità, sarà la ragione delle velocità composta direttamente di quella delle moli d'acqua scaricate in egual tempo, e reciprocamente di quella delle sezioni: e la ragione delle sezioni si comporrà altresì della diretta delle moli d'acqua, e della reciproca delle medie velocità: il che ec.

PROPOSIZIONE VII.

La quantità d'acqua, che esce da una medesima, o da eguali sezioni, supposta la stessa media velocità, è proporzionale al tempo, che dura l'acqua a scolare.

Ciò è manifesto, perchè in duplo tempo verrà dupla quantità d'acqua, in triplo tempo, tre volte altrettanta, e così secondo qualunque moltiplicità di tempo, si avrà un egualmente moltiplice copia d'acqua, corrispondendo sempre al maggior tempo maggiore quantità d'acqua, al minore altresì minore, ed all'eguale una eguale: sta dunque la quantità d'acqua nella stessa proporzione del tempo; il che ec.

Corollario.

Quindi si raccoglie, che le quantità d'acqua, scaricate da varie sezioni di diversi fiumi, o del medesimo in varj tempi; saranno in ragione composta di quella delle sezioni, di quella delle medie velocità, e di quella di essi tempi: o pure, in vece delle sezioni prendendo l'altezza, e la media larghezza loro, si dirà che le dette quantità d'acqua sono in ragione composta delle altezze, delle larghezze, de' tempi, e delle velocità, sicchè, se una quantità d'acqua si chiami Q, un altra *q*, ed il tempo, in cui scola la prima dicasi T, la sua velocità V; l'altezza della sezione per cui passa A, la larghezza L: ma il tempo, che dura a scorrere l'altra sia *t*, la velocità *u*, e l'altezza della sua sezione *a*, la larghezza *l*, sarà Q a *q*, come A L T V ad *a l t u*, essendo questi prodotti in ragione composta de' loro coefficienti. Così se la piena d'un fiume durò nello stesso grado ore 10. avendo l'altezza di braccia 8. in larghezza di 500. colla velocità di gradi 6. e la piena d'un altro durò ore 12., ed ebbe un' altezza di braccia 9. in larghezza di braccia 400., avendo gradi 5. di velocità: sarà la copia d'acqua scaricata dal primo fiume a quella, che scaricò il secondo,

co-

come 24000 (prodotto de' numeri 10. 8. 500. 6.) a 216000. (prodotto degli altri 12. 9. 400. 5.) cioè in minimi termini, come 1. a 9.

PROPOSIZIONE VIII.

Eguale quantità d' acqua scaricheranno due sezioni di uno stesso, o di due fiumi diversi, in ciascuno de' 22. casi seguenti.

I. Stante la medesima velocità, se le sezioni saranno reciproche de' tempi.

II. O pure il prodotto dell'altezze ne' tempi reciproco delle larghezze.

III. Ovvero il prodotto de' tempi, e delle larghezze reciproco delle altezze.

IV. Posta la medesima altezza, se il prodotto della velocità, e della larghezza sarà reciproco de' tempi.

V. O pure il prodotto della larghezza, e del tempo reciproco della velocità

VI. O quando il prodotto della velocità, e del tempo sia reciproco delle larghezze.

VII. Supposta la medesima larghezza, se saranno i tempi reciprochi del prodotto della velocità nell'altezza.

VIII. Ovvero se le altezze saranno reciproche del prodotto del tempo nella velocità.

IX. O pure, se le velocità saranno reciproche del prodotto del tempo nell'altezza.

X. Posto il medesimo tempo, se l'altezze saranno reciproche del prodotto della velocità nella larghezza.

XI. O pure le velocità reciproche del prodotto dell' altezza nella larghezza, che è quanto dire, reciproche delle sezioni.

XII. Ovvero se le larghezze saranno reciproche del prodotto della velocità nell' altezza.

XIII. Se poste le sezioni eguali fussero i tempi reciprochi delle velocità.

XIV. Se essendo i tempi reciprochi delle larghezze, fussero le velocità reciproche dell'altezze.

XV. Se le altezze essendo reciproche de' tempi, fussero le larghezze reciproche delle velocità.

XVI. Se il prodotto delle velocità per l' altezze sarà reciproco del prodotto de' tempi per le larghezze.

XVII. Ovvero il prodotto delle velocità per le lunghezze sia reciproco al prodotto de' tempi per le altezze.

XVIII. O pure il prodotto delle velocità de' tempi sia reciproco delle sezioni.

XIX. Se il prodotto delle velocità per le sezioni sia reciproco de' tempi.

XX. Ovvero il prodotto de' tempi per le sezioni sia reciproco delle velocità.

XXI. O che il prodotto della velocità, e del tempo, e dell' altezza sia reciproco delle larghezze.

XXII. O che il prodotto del tempo, della velocità, e della larghezza sia reciproco dell'altezze.

Imperocchè ritenendo i simboli del corollario della proposizione precedente, allora Q sarà eguale a *q*, quando A L T V pareggerà *a l t u*; per tanto se V è eguale a *u*, averemo A L T eguale ad *a l t*, e però A L ad

ad *a l*, come reciprocamente *t* a T, che è il primo caso.

Ed ancora A T ad *a t*, come *l* ad L, che è il secondo.

Siccome ancora L T ad *l t*, come *a* ad A, che è il terzo.

Che se A è eguale ad *a*, sarà L V T eguale ad *l u t*; onde L V ad *l u*, sta come *t* a T, che è il quarto caso.

E altresì L T ad *l t*, come *u* ad V, che è il quinto.

E di più V T ad *u t*, come *l* ad L, che è il sesto.

Essendo poi L eguale ad *l*, si avrà T A V eguale a *t a u*, onde T a *t*, come *a u* ad A V, che è il settimo.

Ed in oltre A ad *a*, come *t u* a T V, che è l'ottavo.

O pure V ad *u*, come *t a* a T A, che è il nono.

Ma prendendo T eguale a *t*, sarà A V L eguale ad *a u l*, onde A ad *a*, come *u l* ad V L, che è il decimo caso.

Ovvero V ad *u*, come *a l* ad A L, che è l'undecimo.

O pure L ad *l*, come *a u* ad A V, che è il duodecimo.

Quando poi le sezioni sono eguali, cioè A L eguale ad *a l*, allora T V è eguale a *t u*, e però T a *t*, come *u* ad V, che è il caso decimoterzo.

Che se i tempi si reciprocano colle larghezze, sarà T L eguale a *t l*, e indi V A eguale ad *u a*, onde V ad *u*, come *a* ad A, che è il decimo quarto.

E reciprocandosi le altezze a' tempi, avremo A T eguale ad *a t*, onde L V è eguale ad *l u*, e L ad *l*, come *u* ad V, che è il quindicesimo.

Di più si avrà la detta egualità A L V T eguale ad *a l u t*, se V A ad *u a* sia reciprocamente, come *l t* ad L T, che è il caso sedicesimo.

O pure se V L ad *u l* sarà come *a t* ad A T, che è il decimosettimo;

Ovvero se V T ad *u t* sia come *a l* ad A L, che è il decimottavo.

O ancora V A L ad *u a l*, come *t* a T, che è il decimonono.

Ovvero T A L a *t a l*, come *u* ad V, che è il vigesimo.

Come ancora V A T ad *u a t*, come *l* ad L, che è il vigesimoprimo.

E finalmente se V T L ad *u t l* sia, come *a* ad A, che è il caso vigesimo secondo, e ciò è quanto si era proposto da dimostrare.

CAPITOLO II.

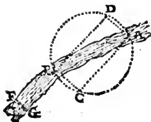
Come nelle piegature, e sinuosità de' fiumi si varj la loro velocità.

PROPOSIZIONE IX.

SE il fiume A B per l'opposizione d'una ripa, o di un argine sia forzato a torcere il corso, mutando la sua direzione in B E, si muterà altresì la primiera velocità, e sarà la nuova all' antica, come il seno di complemento dell' angolo della sua deviazione A B D (contenuto da entrambe le direzioni nuova, e antica) al seno totale.

Descritto sul diametro A B un cerchio A D B C, e prolungata dentro di esso la nuova direzione B E verso D, congiungasi A D, e compiscasi

 il ret-



il rettangolo A D B C. Se dunque la velocità dell' acqua, che scorre per A B, si rappresenti dalla stessa A B, si potrà intendere composta delle due velocità laterali, secondo A C, e secondo A D, proporzionali alle lunghezze medesime de' lati del detto rettangolo C A D B: imperocchè da queste ne risulterebbe la stessa velocità del moto composto A B. Ma una di quelle velocità componenti, cioè la A D, ovvero C B viene totalmente impedita dalla opposizione della ripa, a cui è perpendicolare; e però non potrà avere alcuno effetto circa il promuovere l'acqua, ma tutta s'impiegerà nel corrodere, o perquotere invano la stessa ripa, o argine opposto; sicchè la sola velocità secondo A C, come quella che riesce parallela alla nuova direzione B E, rimarrà viva, e libera, e si spenderà tutta in promovere il corso dell' acqua per la detta direzione, senza punto diminuirsi: dunque la velocità nuova all'antica, starà, come A C, ovvero D B alla A B; ed è D B seno di compimento dell'angolo della deviazione A B D; dunque ec. Il che ec.

Corollario I.

Quando l'angolo della deviazione fosse infinitamente piccolo, come allorchè l'acqua si svolge per una piegatura curva, che viene toccata dalla prima direzione, allora punto non si diminuisce la primiera velocità, essendo come nullo l'angolo del contatto, ed il suo compimento ad un retto non differendo sensibilmente dall'angolo interamente retto: sicchè riunendosi i punti A, D, il seno B D non è disuguale al seno totale A B. Vedi le mie Note al Trattato del moto accellerato del Galileo nel Corol. 1. della Prop. 8. e al num. 28. e 29.

Corollario II.

Secondo che l'angolo A B D sarà maggiore, o minore, il suo compimento B A D sarà viceversa minore, o maggiore, ed il suo seno B D altresì scemerà tanto più, o tanto meno dal seno totale A B, e con pari passo la velocità nuova si scosterà, o si avvicinerà più all'antica.

Corollario III.

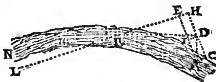
La sezione G F del ramo B E dovrà ampliarsi dopo la deviazione, corrispondendo reciprocamente (per la prop. 2.) alla velocità, che si è veduto dover sempre alquanto diminuire; che però l'alveo si farà più largo, o più profondo, o parte in larghezza, parte in altezza acquisterà tanto, da compensare la diminuzione della sua velocità.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Se il fiume A B si pieghi in B M, e quindi si ripieghi in M N, la velocità, che in questa terza direzione converrà al fiume, sarà la medesima con quella, che preso avrebbe se immediatamente dalla prima direzione A B fusse passato alla terza M N.

Si conduca dal punto A sopra la direzione M B continuata verso D la perpendicolare A D. Sarà per la precedente proposizione la B D misura della velocità competente alla seconda direzione B M, posta B A misura della primitiva velocità, con cui camminava il fiume nella prima direzione: e condotta pel punto B la B L parallela alla terza direzione M N, e dal punto A la perpendicolare A E sopra la medesima B L prolungata, sarà B E misura della velocità, con cui anderebbe il fiume per la B L, cioè per la stessa M N, se immediatamente passasse in essa dalla prima direzione A B. Dico adunque, che detta B E misura altresì la velocità, con cui anderà il fiume per la M N passando dalla seconda direzione B M: perchè sebbene tirata dal punto D la perpendicolare D H sopra la B L parrebbe, che nel passaggio da B M a M N, ovvero dalla D B nella B L, essendo B D la velocità per essa B D, ovvero B M, dovrebbe la B H essere la velocità per la susseguente B L, ovvero M N; tuttavolta è da avvertirsi, che nel detto passaggio, quantunque sia vero, che resti impressa all' acqua la velocità B H derivata dalla B D, si altera però l'effetto della velocità A D, la quale prima totalmente spendevasi nel premere la ripa parallela a B M, ed ora non così viene applicata contro la ripa parallela a B M, cui non è perpendicolare: onde conviene risolverla nelle due componenti A I, A C, conducendo la D I perpendicolare sopra A E, e compiendo il rettangolo D C A I; dalla quale risoluzione si conosce, che della velocità A D la sola A I cospira colla D H a premere la ripa opposta alla B L, e fa tutta la velocità A E diretta contro di essa; ma la A C essendo direttamente contraria alla H B, viene ad elidere la porzione H E eguale alla detta A C: e per tanto viene a restare viva la sola velocità E B secondo la direzione M N, come sarebbe accaduto, se dalla direzione A B il fiume passato fusse immediatamente alla B L parallela ad M N; il che ec.



Corollario.

Quindi si avverta, che quando si è detto nella proposizione 9. e quando dirassi altrove, che nel mutar direzione la velocità nuova del fiume sta all'antica, come il seno di compimento dell' angolo della deviazione, al seno totale, si considera la velocità antica, come quella che primitivamente conviene al fiume, e che tutta s'impiega nel farlo correre parallelo alle ripe, senza tormentarle con una porzione di velocità già derivata da un' altra precedente, e diretta contro le dette ripe.

 PRO-

PROPOSIZIONE XI.

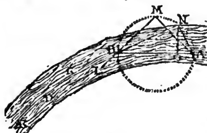
Per quante si vogliano direzioni intermedie B C, C D, D E passi un fiume dalla prima direzione A B nell' ultima E F, eserciterà in questa la stessa velocità B L, come se immediatamente dalla prima A B passato fusse nell' ultima piegandosi subito nella B O parallela ad E F.



Imperocchè per la precedente proposizione, tal velocità si trasfonde nella terza C D, come se questa immediatamente succedesse ad A B, o fusse seconda. Posta dunque C D seconda, tal velocità si trasfonderà nella terza D E, come se questa stata fusse in secondo luogo: ma posta la D E seconda, sarebbe la E F terza, ed in essa si trasfonderebbe la stessa velocità, come se immediatamente succedesse alla prima. Dunque medianti le intermedie direzioni s' imprime nell' ultima E F la stessa velocità L B, che immediatamente si deriverebbe in essa dalla prima A B; il che ec.

PROPOSIZIONE XII.

Negli alvei curvilinei de' fiumi si mantiene la stessa velo ità non ostante qualunque lunghissima piegatura de' medesimi purchè altronde non si accellerino, o si ritardino: cioè se saranno di fondo orizzontale, e di ripe sempre equidistanti.



Potrebbe parere secondo la precedente proposizione, che quantunque in ogni minima piegatura non possa avervi sensibile diminuzione di velocità per lo Coroll. 1 della Prop. 9. ad ogni modo questa dovesse dopo un lungo tratto diventare sensibile. Imperocchè sia A B la prima direzione d' un fiume, e dopo il lungo tratto A B C D sia l' ultima la direzione D R, a cui sia parallela B M, e prolunghisi altresì la direzione C B che immediatamente succede alla prima, verso N. sebbene l' angolo di contatto A B N non è sensibile, questo però infinite volte replicato in ogni punto della curva A B D R forma finalmente un angolo A B M, contenuto dalla direzione ultima D R, e dalla prima A B, che è sensibilissimo, onde gli corrisponde un seno di compimento B M notabilmente minore di B A: se dunque talmente nell' ultima direzione D R resta modificata la velocità, passando per le direzioni interposte A B, B C, C D, come se l' ultima D R succedesse immediatamente alla prima A B, dovrà la velocità della parte D R misurarsi dalla B M, come si misurerebbe, se dalla A B si piegasse il fiume in B L parallela a D R.

Ma

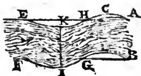
Ma per levare all' argomento la maschera, basta notare, che la diminuzione di velocità derivata dall' insensibile piegatura, che fa in ogni punto la curva, non è solamente infinite volte più piccola della diminuzione, che accaderebbe, se l'angolo dell' inclinazione delle direzioni fusse sensibile; ma anzi è infinite volte infinitamente piccola, cioè del secondo ordine dell' infinita piccolezza: perchè descrivendo col raggio B N l'archetto N O, perpendicolare sopra A B, sarà A O la diminuzione della velocità nel passaggio da A B in B C, e per l'infinita picciolezza dell' angolo del contatto A B N sarà la corda A N infinitamente piccola, e sta B A ad A N, come la stessa A N ad A O; dunque di bel nuovo A O è infinitamente minore di A N, la quale già era infinite volte più piccola di A B; e però la detta A O è infinite volte infinitamente piccola, cioè nel secondo grado d'infinita picciolezza rispettivamente ad A B: ed è come una seconda differenza, la quale ancora infinite volte replicata non giunge a fare una parte finita sensibile, ma al più si alza al primo grado degl' infinitamente piccoli. Per tanto la velocità in qualsivoglia punto della curva A B C D sarà sempre come la stessa, ch'era ne' punti precedenti, senza sensibile diminuzione, per quel che dipende dalla flessuosità del fiume, cioè se da altre cagioni non viene alterata; Il che ec.

Corollario.

Quindi è, che molto giova al felice smaltimento dell' acque la placida curvatura delle ripe, piuttosto che la piegatura di esse ad un angolo sensibile, e troppo risentito: onde la natura medesima per lo più affetta una dolce curvatura, e riempie gli angoli troppo acuti, se sono concavi verso il corso dell' acqua, e li spunta se sono convessi, riducendosi presso ad una via curvilinea, come quella che trova essere la più facile per condurre l' acque al suo termine, quando la frequenza degl' impedimenti, che incontra per istrada la distoglie dal condurvele per una sola linea diritta.

PROPOSIZIONE XIII.

Essendo la medesima velocità d' un fiume orizzontale nel suo alveo curvilineo, e serpeggiante A B D C E F, come nell' alveo diretto A B E F della stessa larghezza, e collocato fra i medesimi termini; si scaricherà l' acqua in più lungo tempo mediante il primo, che mediante il secondo.



Perchè essendo la stessa velocità delle parti dell' acqua nell' uno, e nell' altro, e la stessa sezione, ma più lungo il tratto curvilineo A C K E, dell' altro retto A E interposto fra i medesimi termini, dovrà spendere l' acqua maggior tempo per venire da un termine all' altro per la via curvilinea, che per la sola retta. Il che ec.

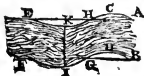
Corollario.

Quindi lo scorciamento dell' alveo de' fiumi, che suole praticarsi per le-

varne le tortuosità, può giovare solamente a far sì, che in tempo più breve si scarichino nel mare, o in altri fiumi loro recipienti: ma non giova già a farli più presto sgonfiare della pienezza loro, o ad impedire, che non s' alzino a tanta altezza, e così scansare il pericolo delle inondazioni; imperocchè scorrendo l'acqua colla stessa velocità in pari larghezza, si disporrà sempre in eguale altezza, siasi diretto, o curvo il tratto dell' alveo per cui passa, ed eguale quantità d'acqua dovendo scaricarsi per ciascheduna sezione; ma essendo in linea retta, il fiume terrà in soggezione minor quantità di terreni adiacenti nel tempo delle piene, senza però liberare più presto dal timore, e dal pericolo dell' inondazione ciascuno de' confinanti. Così un esercito di soldati camminando in ordinanza, ovvero una processione ben regolata di gente, passando per due strade diverse interposte fra i medesimi termini, una più lunga, un'altra più corta, giugnerà più presto al suo termine per questa, che per quella: ma non passerà già più presto avanti qualunque casa posta nella via più corta, che avanti ad una posta nella strada più lunga.

PROPOSIZIONE XIV.

Molti altri vantaggi si hanno dall' alveo curvilineo, e serpeggiante de' fiumi, più che dall' alveo rettilineo.



Primo perchè un alveo curvilineo, per essere più lungo, ci dà un luogo più capace per contenere la copia dell' acque. Così se la via curva B D I pareggerà la retta B F, giunta che sia l' acqua in I K, non sarà nel ter mine del suo corso, come lo sarebbe nell' alveo rettilineo, essendo arrivati in egual tempo alla sezione F E, onde avrà ancora il residuo dell'alveo K I F E, per cui potersi stendere, e dilatarsi. Secondo perchè tutta la materia, che depone il fiume nell'alveo A E F B diretto, la deporrà nel tratto curvilineo eguale A B D I K, e per lo residuo della strada I K E F ne deporrà dell'altra, onde più puro, e più ripurgato entrerà nel suo recipiente, senza portarvi tanta materia a riempirlo. Terzo per la lunghezza del viaggio entrando il fiume più tardi nel recipiente, darà tempo a questi di avere già in gran parte scaricata la propria piena, o degli altri superiori influenti, prima di accrescerlo colla sua, la quale se si fusse unita coll' altre, avrebbe forse cagionato troppo grande altezza d' acque, con pericolo d'inondazione: è però vero, che per questo capo si potrebbe ancora dar caso, che in altre circostanze tornasse meglio l'essere retto, che curvo il corso dell'acqua, perchè più presto si scaricasse nel recipiente, avanti che in esso si accumulino le piene degli altri influenti. Quarto finalmente, essendo il fondo dell' alveo, o almeno la superficie dell' acqua di qualche notabile pendenza, si potrà dare più spedito corso all' acqua per un alveo curvilineo, che per il rettilineo, come bene considerò il Galileo nella scrittura del fiume Bisenzio. Veggasi ciò che ho detto nelle note al Trattato del moto accelerato di esso Galileo prop. 9. e 10.

CA-

CAPITOLO III.

Come in occaſione di piene ſopravvenienti, o d' altr' acque portate nel medeſimo fiume da altri influenti, creſca l' altezza di eſſo.

PROPOSIZIONE XV.

SE un fiume creſca per nuova acqua ſopravveniente, la quantità d' acqua, che in un dato tempo ſi ſcarica da una ſua ſezione, durante la piena a quella che in altrettanto tempo prima della piena ſi ſcaricava nello ſteſſo ſito, è in ragione compoſta della media velocità acquiſtata nello ſtato di piena, e quella, che avea per l' avanti, e dell' altezza della preſente ſezione all' altezza, che prima ivi aveva, ſuppoſto l' alveo regolare.

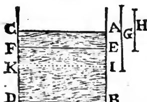
Imperocchè nell' alveo regolare ſi mantiene la ſteſſa larghezza, e però le ſezioni ſono come le altezze: onde le moli d' acqua, la cui ragione componeſi di qoella delle medie velocità, e di quella delle ſezioni per la prop. 5. ſarà compoſta nel caſo noſtro delle medie velocità, e dell' altezze dell' acqua: il che ec. O pure dicaſi, che eſſendo per lo Coroll. della prop. 7. Q egoale ad A L T V, e *q* eguale ad *altu*, ſe Q ſignifica la quantità d' acqua che ſcorre pel fiume in tempo di piena, e *q* quella, che vi ſcorreva avanti, in tempi eguali, ed in eguali larghezze, eſſendo T eguale a *t*, ed L eguale ad *l*, ſarà Q a *q*, come A V ad *au*: che vuol dire in ragione compoſta dell' altezze, e delle velocità.

Corollario

Data dunque l' altezza dell' acqua in varj ſtati del fiume, e la media velocità, ſi dà la proporzione dell' acqua; come per eſempio, ſe l' altezza dell' acqua avanti la piena era di braccia 5. e correva in un minuto ſecondo due piedi, ma ſopraggiunta la piena ſi trovi nel fiume un' altezza di braccia 9. e tale velocità, che in un ſecondo paſſi piedi 4. ſarà la copia dell' acqua ordinaria che prima vi ſcorreva, alla quantità che porta in tempo di piena, come 10. a 36. (il che ſi raccoglie moltiplicando inſieme i due primi numeri, e i due ultimi) cioè in ragione di 5. a 18.

PROPOSIZIONE XVI.

L'altezza A B, a cui giugne un fiume nel suo alveo regolare per sopraggiunta di nuove acque, all'altezza E B, che prima avea, ha la ragione composta della quantità d'acqua, che scorre per la sezione A B D C a quella, che scorreva per la E B D F, e reciprocamente della velocità H esercitata prima della piena nell' altezza E B, alla velocità G, che esercita in tempo di piena nell'altezza A B.



Supponiamo, che avanti la piena si fusse mosso il fiume colla stessa velocità G, ed in tale ipotesi portasse l'acqua sua ordinaria al livello I K nella sola altezza B I. Sarà dunque per la proposizione seconda la sezione E B D F alla I B D K, cioè l'altezza E B alla I B, come la velocità G alla H; e perchè colla stessa velocità G si scarica l'una, e l'altra sezione I B D K, A B D C, sarà la prima sezione alla seconda, cioè I B ad A B, come la quantità d'acqua ordinaria a quella che corre in tempo di piena, per la prop. 3. ed è A B a B E in ragione composta di A B a B I [cioè della quantità d'acqua in tempo di piena, alla quantità dell'acqua ordinaria, che vi era prima] e di B I a B E (cioè della velocità H alla velocità G) dunque l'altezza a cui giugne un fiume per acqua sopravveniente, all'altezza, che aveva avanti, è in ragione composta della quantità d'acqua presente alla quantità di prima, e reciprocamente delle loro mezzane velocità; il chè ec.

Corollario I.

Data dunque la proporzione dell'acque, e delle velocità si averà la ragione dell'altezze. Per esempio: debba introdursi di nuovo in un fiume reale un torrente, che vi porti la trentesima parte dell'acque, che prima solea contenere; e si sappia, che per la giunta di detto torrente si accrescerà d'una centesima parte la sua primiera velocità. Sarà dunque la quantità dell'acqua dopo l'introduzione, a quella ch'era avanti, come 31. a 30., e la velocità primiera alla nuova velocità, come 100. a 101. Però la ragione composta delle quantità d'acqua direttamente, e delle velocità reciprocamente, sarà come di 3100. a 3030., cioè di 310. a 303; per tanto l'altezza dopo l'introduzione sarà cresciuta solo 7. parti trecentesime terze: sicchè se prima era l'altezza di 25. piedi, e 3. once, l'aumento sarà di once 7. diventando di piedi 25. e once 10.

Corollario II.

Se le velocità fussero proporzionali alle quantità d'acqua, allora l'altezza punto non crescerebbe, nè diminuirebbe per la giunta dell'acqua introdottavi: perchè la ragione composta di due ragioni eguali reciprocamente applicate, è ragione di egualità; come se nel precedente caso la velocità crescesse un trentesimo, siccome cresce l'acqua, rimarrebbe l'altezza la me-

medefima, effendo allora in ragione compoſta di 31. a 30. e reciprocamente di 30. a 31., il che dà la ſteſſa altezza di prima.

Corollario III.

E ſe le velocità creſceſſero in maggior ragione delle quantità d' acqua, l' altezza del fiume ſcemerebbe in vece di creſcere, come per eſempio, ſe creſcendo l'acque un trenteſimo, la velocità creſceſſe la vigeſimaquinta parte, ſarebbe la ragione delle quantità d' acqua, come 31. a 30., e quella delle velocità reciprocamente preſe, come 25. a 26. delle quali due ſi compone quella dell' altezza nuova all' antica, come 745. a 780.; onde ſarebbe ſcemata, dopo le ſopraggiunta copie d' acqua, l' altezza della ſezione di 7 parti centeſime cinquanteſimeſeſte: cioè, ſe prima l' altezza era 13. piedi, ſi ſarebbe diminuita 7. once, riducendoſi a piedi 12., once 5. - 775

Corollario IV.

Solamente dunque creſce l' altezza de' fiumi per giunta di nuova acqua, quando l' accreſcimento di velocità ha minor ragione alla velocità primiera, che l' aumento dell' acqua alla copia d' acqua di prima; il che merita d' eſſere conſiderato diligentemente, per confutare molti volgari errori, in cui ſogliono incorrere quelli, che ſenza il lume della Teorica vogliono farla da pratici in queſte difficiliſſime materie di fiumi.

SCOLIO I.

Si è quì computata ſolamente l' altezza delle ſezioni, ſupponendoſi l' alveo regolare, cioè d' eguale larghezza dapertutto; ma in pratica per lo più ſuole nelle parti ſuperiori ampliarſi la larghezza della ſezione, per eſſere le ripe diſpoſte a ſcarpa, e colle ſue banchine interiori, o golene: di maniera che la ſezione loro non è un rettangolo, ma un trapezio, o più trapezj, ed anche ſovente una figura curvilinea irregolare, che però ſempre ſi dilata più nelle parti di ſopra. Quindi, in vece della uniforme larghezza ſuppoſta nella ſezione, ſi ſarebbe dovuta mettere in conto la mezzana larghezza avanti, e dopo la giunta dell' acqua, con dire, che l' altezza nuova all' antica è in ragione compoſta della diretta delle quantità d' acqua, che corre preſentemente, e che prima correva, e reciproca al delle velocità, come delle medie larghezze nel primo ſtato, e nel ſecondo. La quale conſiderazione non ſolo non accreſce l' altezza dell' acqua, che può riſultare in un fiume per la giunta d' una piene, o d' un nuovo torrente introdottovi, ma anzi le ſcema: come per eſempio, ſe nel caſo del Coroll. 1. l' acqua nuova all' antica ſtia come 31. e 30., e la velocità di prime alla preſente, come 100. e 101. e le media larghezza avanti la giunta ſtia alla ſuſſeguente, come 50. a 51. (ſicchè ſi aumenti l' acqua un trenteſimo, creſce la velocità un centeſimo, e ſi dilati la media larghezza un cinquanteſimo) moltiplicando gli antecedenti, ed i conſeguenti, avremo la ragione dell' altezze nuova, ed antica, come 155000. a 154530; o pure 15500. a 15453.; la qual ragione è più proſſima all' egualità, che non era la trovata di ſopra in detto corollario, di 310. a 303, equi-

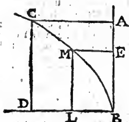
equivalendo a quella di 310: a 309. con poco meno d'un sedicesimo: che però anche minore in pratica riesce l'alzamento, che si dee aspettare dall'unione del torrente suddetto al fiume reale, non accrescendo più 7. once sopra il 25. piedi, e 3. once d'altezza, che si supponeva aver prima, ma solo alquanto meno d'un oncia.

SCOLIO II.

Si avverta ancora da' principianti di non prendere equivoco in credere, che quando si dice, l'altezza del fiume, prima di ricevere l'acqua sopravveniente, essere la B E, e dopo giunta la nuov' acqua, essere la B A, tutto l'eccesso dell'acqua aggiunta debba correre sotto la sola altezza E A, rimanendo l'acqua ordinaria nella solita altezza B E. Tale immaginazione sarebbe erronea, essendo molto maggiore l'altezza sotto cui si scarica l'acqua nuova, e minore quella, per cui dopo fatta la giunta, scorre l'antica, essendo l'altezza di quella per esempio A I, e di questa il residuo I B, che sta alla B E, come reciprocamente la velocità antica H alla nuova G, mercecchè scaricandosi ora l'acqua stessa ordinaria colla maggiore velocità G, per essere spinta, e premuta dalla giunta della nuova acqua sopravveniente, dovrà, per così dire, assottigliarsi, abbassandosi alla detta altezza A I, e rimanendo il resto d'altezza I A per la nuov' acqua: e così può intendersi, come talvolta la giunta dell'acqua possa fare, che scemi l'altezza primiera, secondo il coroll. 3. potendo I A riuscire minore di I E, quando la velocità spinga sì fortemente l'acqua inferiore, che l'abbassi sotto il primo livello a tal segno, che avanzi ancora più luogo, che non bisogna per l'acqua sopravveniente.

PROPOSIZIONE XVII.

Se le velocità fussero proporzionali alle altezze dell' acqua, sarebbero i quadrati dell' altezze proporzionali alle quantità dell' acqua: ovvero le altezze come le radici quadre delle dette quantità.



La quantità d'acqua, che scorre sotto l'altezza A B, si esprima per A C, e quella, che scorre sotto l'altezza E B, si esponga per E M, sarà per la precedente, A B a B E in ragione composta di A C ad E M, e della velocità per B E alla velocità per B A, cioè (in questa ipotesi delle velocità proporzionali alle altezze, che è del P. Abate Castelli, del Cassini, e altri) della stessa B E a B A; per tanto averemo A B B E, come il rettangolo di A C in E B al rettangolo di E M in B A, o come D B E ad L B A, e però il prodotto degli estremi L B A in B A sarà eguale al prodotto de' mezzani D B E in B E; onde sarà il quadrato dell'altezza B A al quadrato dell'altezza B E, come D B a B L, cioè come la quantità d'acqua A C alla quantità E M; Il che ec.

Co-

Corollario I.

Applicando le A C, E M esprimenti le quantità dell'acqua alle loro respettive altezze A B, E B, la curva B M C, che ne nasce è una parabola quadratica.

Corollario II.

Per sapere, che altezza debba fare in un fiume la giunta d'una data quantità d'acqua, si cavi la radice quadra dell'acqua prima, e della somma di essa con l'aggiunta; che l'altezza nuova starà all'antica, come la radice di detta somma alla radice della prima acqua ordinaria. Per esempio la portata d'un fiume sia 30. e debba aggiugnersi una parte trentesima, sicchè la somma sia 31. le loro radici quadre sono 5. con 48. centesimi per il primo numero, e 5. con 57 centesimi per il secondo. Dunque in questa ipotesi l'altezza nuova all'antica dovrebbe stare, come 557 a 548., o come 139. e un quarto, a 137. cioè se la prima altezza era undici piedi, e cinque once, dopo la giunta crescerebbe 2. once, e un quarto di più, diventando 11. piedi, e 7. once, con 3. minuti, o dodicesimi d'oncia.

PROPOSIZIONE XVIII.

Che se l'altezze fussero in duplicata ragione delle velocità, riuscirebbero le altezze medesime come le radici cube de' quadrati delle quantità d'acqua: cioè i cubi dell'altezze sarebbero come i quadrati delle dette quantità d'acqua.

Perchè, stante le suddette cose, A B a B E sarà in ragione composta di A C ad E M, e della velocità per E B alla velocità per B A; se dunque le dette velocità sono come le radici quadre di E B, e di B A, averemo A B a B E, come il prodotto di A C nella radice quadra di B E al prodotto di E M nella radice quadra di A B; e moltiplicando gli estremi, ed i mezzani, sarà E M in A B moltiplicato nella sua radice quadra, eguale ad A C in B E moltiplicato nella radice della stessa B E; onde E M ad A C sarà, come B E moltiplicato per la sua radice, ad A B moltiplicato per la radice sua; e quadrando dall'una, e dall'altra parte, sarà il quadrato di E M al quadrato di A C, come il cubo B E al cubo B A; il che si dovea ec.

Corollario I.

In questa ipotesi, che è del Torricelli, del Guglielmini, ed altri, applicando le A C, E M esprimenti le quantità dell'acqua alle loro respettive altezze A B, E B, la curva B M C riesce una parabola cubica del second'ordine, in cui i cubi dell'applicate D C, L M, sono come i quadrati delle distanze dal vertice B D, B L.

Co-

Corollario II.

Per determinare l'altezza, che farà la giunta d'una determinata quantità d'acqua; si quadrino i numeri esprimenti l'acqua di prima, e la somma di essa coll'aggiunta: le radici cubiche de i detti quadrati saranno proporzionali alle altezze. Per esempio, se al solito le quantità d'acqua siano 30. e 31., i di cui quadrati sono 900., e 961. le radici cubiche di essi sarebbero 9. con 66. centesimi, e 9 con 81. centesimi, cioè in ragione di 322. a 327., la quale è poco maggiore della già ritrovata nel coroll. 2. della precedente nell'altra ipotesi, essendo quella di 137. a 139. e un quarto, e questa di 137. a 139. con poco più d'un ottavo, cioè esattamente con 41. parti trecentesime ventiduesime: onde se la prima era 11. piedi, e 5. once, l'aumento sarà di once 2. e un minuto e mezzo in circa.

PROPOSIZIONE XIX.

Se le velocità fussero proporzionali a' seni dell' inclinazione, che ha la superficie dell' acqua coll' orizzonte, ovvero a' momenti della gravità nel piano, che fa detta superficie: determinare l' altezza B A, che averà il fiume aumentato d' una data quantità d' acqua, oltre quella che ha nell' ordinaria sua altezza B E. Supposto però, che il fondo del fiume sia come orizzontale.

Tirisi l' orizzontale B D, concorrente col pelo dell' acqua E D nel punto D, dove il fiume averà il suo termine: e sopra il diametro B D si descriva il mezzo cerchio B M D, che sega la cadente dell' acqua in M. Indi, come sta la quantità d' acqua, che corre nella altezza B E alla somma di essa, e della giunta, che dee sopravvenire al fiume, così stia E M ad un'altra linea, che sia D F. Poi si applichi alla D F un rettangolo G D K H eguale al quadrato B D, ed eccedente d' una figura quadrata G F I H, sicchè B D sarà media proporzionale fra tutta la D G, e la G H, ovvero la G F; onde sarà D G maggiore della B D, e potrà dal punto D sopra la B A applicarsi la retta D A eguale a D G, segante la periferia del mezzo cerchio in C. Dico adunque, che la B A è l' altezza che si ricerca; perchè congiunte le rette B M, B C, che sono i seni d' inclinazione delle cadenti E D, A D, sarà il rettangolo A D C eguale al quadrato B D, cioè al rettangolo D G F, onde essendo D A eguale a D G, sarà D C eguale a G F, e la rimanente C A eguale alla residua D F; e però starà E M ad A C, come la quantità d' acqua che corre sotto l' altezza E B alla somma di essa, e dell' acqua che debbe aggiugnersi; e B M a B C, per l'ipotesi sta come la velocità dell' acqua nell' altezza B E alla velocità, che averebbe nell' altezza B A, la quale altezza sta alla B E in ragione composta di A B a B D, e di B D a B E; ma la prima ragione eguaglia quella di A C a C B, e la seconda pareggia quel-

quella di B M ad M E, onde B A a B E ſta come il rettangolo di A C in B M al rettangolo di E M in B C, ma ancora la altezza che ſi cerca dee ſtare ad E B in ragione compoſta della quantità d' acqua B C alla quantità E M, e reciprocamente delle velocità, cioè de'ſeni B M, B C, che è quanto dire, come il rettangolo di A C in B M a quello di E M in B C: dunque l'altezza B A è quella perappunto, che ſi cerca, perchè soddisfà alle condizioni, che debbe avere. Il che dovea ritrovarſi.

PROPOSIZIONE XX.

La ſteſſa quantità d' acqua ſopraggiungendoſi al medeſimo fiume in diverſi ſtati, non gli cagiona eguale accreſcimento di altezza, ma quando lo trova baſſo lo rialza più, e quando alto lo innalza meno

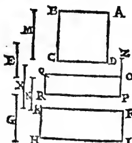
Se il fiume è regolare, avendo la ſteſſa larghezza in cima, che in fondo, già è manifeſto, che avendo minor copia d'acqua ſarà meno veloce, o dipenda la velocità dall'altezza, o dalla pendenza ſopra il ſuo recipiente; perchè allora il pelo dell'acqua è ancora meno inclinato all'orizzonte: e la ſteſſa giunta di acqua non potrà più accellerare il pigro moto del fiume baſſo di quello accelleri il corſo del fiume alto: ſicchè la velocità dopo la giunta dell'acqua nel primo caſo riuſcirà minore, e nel ſecondo maggiore; dunque l'acqua aggiunta, per la prop. 2. ſcorrendo ſopra il fiume, che era baſſo con minore velocità, vi farà maggiore altezza, e ſopra il fiume alto camminando con velocità maggiore, vi farà minore altezza, come richiede la corriſpondenza delle ſezioni reciproche alle velocità nel medeſimo corpo d'acqua; dunque quando ancora l'antica rimaneſſe al ſuo primo livello, la nuova giunta vi ſi alzerebbe ſopra, meno quando ritrova il fiume più groſſo, e più, quando l'incontra più magro: ma inoltre abbaſſandoſi più l'acqua groſſa, che l'acqua magra, come quella reſta affetta di maggiore velocità di queſta, tanto a più baſſo livello dee giugnere l'acqua ſopravveniente al fiume groſſo, che quella la quale ſopravviene ad un fiume magro: in quella maniera, che ſe un gigante colla ſua ſtatura arriva ad una certa fineſtra, ed un uomo d'ordinaria ſtatura ad un altra, caricandoſi l'uno e l'altro di un ragazzo ſopra le ſpalle, ma ſotto del peſo di eſſo più s'incurvaſſe il gigante, che l'uomo di giuſta ſtatura, ed il fanciullo ſteſſo più rannicchiaſſe ſulle ſpalle del primo, che del ſecondo: certamente ſi alzerà meno il detto ragazzo ſopra la fineſtra, a cui prima giungeva il gigante, che ſopra quella a cui l'uomo di ſtatura ordinaria arrivava. Il che ec.

CAPITOLO IV.

Del concorso d' un fiume con un altro.

PROPOSIZIONE XXI.

D*Ate le sezioni O R, A C di due fiumi, e le loro velocità N, M avanti il concorso, ritrovare quella mezzana velocità E, con cui comunemente scorrendo per le stesse sezioni le loro acque, egual copia se ne staricherebbe in pari tempo, come se ne scarica da amendue i fiumi andando separatamente colle proprie loro velocità. Chiamisi la detta velocità E una* velocità ragguagliata.



Si faccia, come la sezione O R del primo alla sezione A C dell'altro, così la velocità M di questo ad un altra velocità X, indi, come la somma delle due sezioni O R; A C sta alla prima O R, così la somma della velocità N, con cui questo camminava, e della velocità X ora ritrovata, ad un' altra velocità E. Dico, che questa è la velocità ragguagliata, che si cercava. Perchè essendo O R ad A C, come M ad X, la stessa quantità d' acqua passerà per O R colla velocità X, che passa per A C colla velocità M. Aggiungasi di comune l'acqua, che nello stesso tempo passa per O R colla velocità N; dunque le due quantità d' acqua, che scorrono per ambi i fiumi, cioè per la sezione A C colla velocità M, e per O R colla velocità N uguagliano la quantità d' acqua, che sgorgherebbe per O R colle due velocità X ed N; Ma stando la somma delle sezioni O R, A C alla sezione O R, come la somma delle velocità X, ed N ad E, bisogna che la quantità d' acqua, che scorrerebbe per ambidue le sezioni insieme O R, A C colla stessa comune velocità E, uguagli la quantità, che scorrerebbe per O R sola colla somma delle velocità X, N, cioè quella che attualmente sgorga per la O R colla velocità N, e per la A C colla velocità M; pertanto la velocità E è quella velocità ragguagliata, con cui se ambi i fiumi colle stesse loro sezioni si scaricassero, tramandano la stessa copia d' acqua, che di fatto tramandano per le medesime sezioni, andando ciascheduno colla propria velocità. Il che ec.

SCOLIO.

In pratica si può adoperare una più breve costruzione arimmetica, ed è la seguente. La somma delle quantità d' acqua, che portano ambidue i fiumi, si divida per l' aggiegato dell' una, e dell' altra sezione; ed il quoziente la-

te farà la velocità ragguagliata, supposto che si esprimano le velocità di ciascun fiume separatamente, per la quantità della sua acqua divisa per la propria sezione. Per esempio sia l' altezza della sezione A C piedi 7. e la larghezza piedi 130. di maniera che la sezione medesima sia piedi quadri 910., e la sua velocità sia di gradi 4., essendo la sua quantità d'acqua 3640. L'altezza poi della sezione O R dell'altro fiume, sia piedi 15. la larghezza piedi 500, e la misura conseguentemente di tutta la sezione sia piedi quadri 7500. la sua velocità sia di gradi 6., essendo la quantità dell' acqua sua 45000. la somma delle quantità d' acqua sarà 48640. la quale divisa per la somma delle sezioni, che è 8410. darà di quoziente cinque, con 559. parti ottocentesime quarantunesime, che sarà la velocità ragguagliata, di cui si tratta: in fatti se questo quoziente si moltiplica per la somma delle sezioni 8410. restituirà 48640., che è la somma dell' acqua scaricata da ambi i fiumi; e però se ciascuno per la sua sezione camminasse colla velocità espressa dal detto quoziente, scaricherebbero la stessa quantità d'acqua tra tutti e due, che ne sgorgava prima, andando colle proprie loro velocità.

PROPOSIZIONE XXII.

Concorrendo un fiume con un altro, la quantità d'acqua, che si scarica per qualsivoglia sezione del recipiente dopo il concorso, a quella che scorreva per esso avanti di ricevere l'influente, sta in ragione composta della somma delle sezioni d'ambi i fiumi avanti il concorso, alla sezione sola del recipiente superiore al sito dell' influenza, e della velocità ragguagliata, alla velocità del medesimo recipiente avanti il detto concorso.

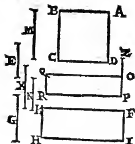
Imperocchè per lo coroll. 1. della prop. 1. è eguale l' acqua scaricata nello stesso tempo per una sezione del recipiente dopo il concorso, alla somma delle due acque portate dall'influente, e dal recipiente prima dell' influenza: ma questa, uguagliando il prodotto delle due sezioni dell' influente, e del recipiente sopra il sito del concorso, moltiplicate per la velocità ragguagliata d'ambedue, sta alla copia d'acqua portata dal solo recipiente prima del concorso, in ragione composta della somma delle suddette due sezioni alla sezione di questo, e dalla velocità ragguagliata alla velocità propria del recipiente avanti di ricevere l' influente; dunque ancora la quantità d'acqua, che porta il recipiente dopo il concorso, a quella che portava prima sta nella stessa ragione composta come sopra; il che ec

PROPOSIZIONE XXIII.

La velocità del recipiente dopo il concorso, sta alla velocità ragguagliata, come la somma delle sezioni d'ambi i fiumi avanti il concorso, alla sezione del recipiente dopo la confluenza.

Perchè scaricandosi egual copia d'acqua per lo recipiente dopo il concorso, che per le sezioni dell'influente, e del recipiente avanti la confluenza, essendo affette ciascuna dalla propria velocità, o tutte, e due dalla stessa comune velocità ragguagliata, bisogna siano reciproche le velocità alle sezioni, e però che la velocità del tronco comune stia alla velocità ragguagliata d'amendue i tronchi separati, come la somma delle sezioni di questi alla sezione, che ha quello dopo il concorso dell'influente; il che ec.

Co-



Corollario.

Essendo evidente per l' esperienza, che sempre la somma delle sezioni de' fiumi separati riesce maggiore della sezione del tronco unito, ancora la velocità del recipiente dopo il concorso, sarà sempre maggiore della velocità ragguagliata.

PROPOSIZIONE XXIV.

Date le velocità M, N, e le sezioni A C, O R di due fiumi concorrenti in un tronco, la cui sezione F H, ritrovare la sua velocità, con cui dopo la confluenza camminerà il fiume nella detta sezione.

Si trovi la ragguagliata velocità E, per la prop. 21. e come la sezione del tronco unito F H sta alla somma delle sezioni A C, O R de' fiumi separati, così stia E a G; questa sarà la velocità competente alla sezione del comune tronco F H, per l'antecedente. Il che ec.

SCOLIO.

Per la pratica, basta dividere la somma delle due quantità d'acqua, portate da i fiumi separati, per la data sezione dell'alveo comune, ed il quoziente ci darà la ricercata velocità: come nel caso dello scolio della prop. 21. se di più fusse l'altezza della data sezione F I piedi 16 la larghezza piedi 505. onde la capacità della sezione fusse piedi quadri 8080 essendo la somma delle due quantità d'acqua portate da ambi i fiumi, come sopra 48640 dividendo questo numero per quello, si avrà 6 con due parti centunesime per quoziente; e questa sarà la velocità ricercata, onde questa velocità sarà maggiore di quella, che avea il recipiente prima del concorso (che supponevasi solamente come 6.) delle dette due parti centunesime.

PROPOSIZIONE XXV.

I momenti, o le forze motivote dell' acque correnti sono in ragione composta di quella delle sezioni, e della duplicata delle velocità.

Essendo che generalmente i momenti, o le forze motrici hanno la ragione composta di quella delle quantità di materia mobile, e di quella delle velocità, con cui le stesse materie si muovono: ma nel caso nostro la materia, che si muove è l'acqua corrente, la di cui quantità già sta in ragione composta delle sezioni, e delle velocità per la prop. 5. aggiungendovi dunque un' altra volta la ragione delle velocità, con cui si muove, si avrà la ragione de' momenti, o delle forze motrici dell'acqua che corre, in ragione composta di quella delle sezioni, e della duplicata delle velocità, cioè de' loro quadrati; Il che ec.

Co-

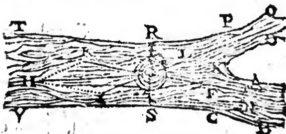
Corollario.

Quindi moltiplicando il valore delle fezioni col quadrato della loro velocità, fi trova il momento, con cui l' acque fcorrono, e con cui incontrandofi vicendevolmente fi urtano infieme. Per efempio la fezione d' un fiume fia come 10. e quella d'un altro, come 7. la velocità del primo a quella del fecondo fia come 4. a 3. i di cui quadrati fono 16. e 9. dunque la ragione delle loro forze motrici, o de' momenti co' quali poffono fare impreffione urtando infieme, o in altro oftacolo, farà come di 160. a 63.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se il fiume O Q X P concorre con l' altro A B C X, dopo il concorfo l' acqua del fiume recipiente fi torcerà dalla prima direzione, e prenderà un' altra di mezzo tra la fuà prima, e quella con cui è inveftito dall' influente.

Si concepifca una palla G galleggiante nella confluenza de' filoni L G, F G d' ambi i fiumi, ficchè refti inveftita dalla corrente d' amendue, effendo quefta adunque fpinta sì dalla forza dell' influente, fecondo la direzione L G; sì da quella del recipiente fecondo la fua prima direzione F G, dovrà fecondo le leggi meccaniche quella palla muoverfi per una direzione G H mezzana fra le dette due direzioni, ed in cui rifulti il moto compofto da ambidue i moti, ad effa impreffi dall'una, e dall' altra forza. Ma il moto di detta palla feguirà appunto quello del filone del fiume dopo il concorfo d' entrambi i confluenti, lafciandofi del tutto trafportare da effo; dunque l'acqua del recipiente farà deviata fecondo l' intermedia direzione G H fra le due proprie de' confluenti L G, F G. Il che fi dovea dimoftrare.



Corollario I.

Dalle fteffe leggi meccaniche può determinarfi la pofitura della nuova direzione G H; imperocchè è dimoftrato, che pofta nella direzione L G la parte G I, e nell' altra F G la porzione G K porporzionali alle velocità impreffe al galleggiante dalla forza di ciafcun acqua, e compiuto il parallelogrammo I G K H, e tirato il diametro G H, quefto farà la direzione ricercata.

Corollario II.

Anzi la lunghezza di effo diametro G H ci darà la velocità del moto

composto, che risulta in detta palla da ambedue le correnti in relazione alle velocità impresse da ciascuno de' confluenti, rappresentate da' lati del suddetto parallelogrammo, che però la G H sarà ancora la velocità del recipiente, in relazione alle G I, G K che esprimono le velocità impresse nel globo G da ambi i fiumi, cioè le stesse velocità de' fiumi, da quali viene trasportato; imperocchè ciascun fiume, se fusse solo, lascerebbe venir giù seco il globo, che placidamente in esso galleggia, e che si suppone totalmente indifferente al moto, colla sua stessa velocità, con cui esso si muove: ed essendo uniti debbono trasportarlo con quella velocità, che dall' unione loro risulta, la quale insieme soddisfà all' esigenze d' ambedue le correnti. Così, se una formica andasse rampicando per lo fuscello G I colla velocità G I movendosi da G verso I, nel mentre che il medesimo fuscello trasportato dalla corrente F G per la direzione del suo filone F G, colla velocità G K, venisse dal sito G I al sito K H, non vi ha dubbio, che la formica col moto composto di questi due sarebbe venuta da G in H, descrivendo il diametro G H colla velocità G H, avendo passato il detto diametro, passando per ciascun punto di esso appunto nel tempo, in cui il fuscello avrebbe passato col suo estremo G lo spazio G K, e coll' estremo I lo spazio I H, ed in quello stesso tempo in cui la formica col moto suo proprio avrebbe scorsa la lunghezza G I del fuscello.

Corollario III.

Il seno dell' angolo, con cui si devia il recipiente dalla sua direzione, cioè il seno dell' angolo H G K, sta al seno dell' inclinazione delle direzioni d' ambi i fiumi I G K, come la velocità dell' influente, alla nuova velocità, che rimane al recipiente dopo il concorso: essendo chiaro, che nel triangolo K G H, il lato H K al lato G H è come il seno dell' angolo opposto H G K al seno dell' angolo H K G, o del suo supplemento a due retti I G K: ma H K eguale a G I misura la velocità dell' influente, e G H è la velocità del recipiente dopo il concorso; dunque ec.

Corollario IV.

Per la stessa ragione il seno della deviazione dell' influente, cioè dell' angolo I G H, sta al seno dell' inclinazione d' ambi i fiumi, che è lo stesso angolo I G K, ovvero del supplemento a due retti G I H; come la velocità primiera del recipiente, cioè I H, ovvero G K, alla velocità nuova, che hanno tutti due uniti nell' alveo comune, cioè a G H.

Corollario V.

E il seno della deviazione del recipiente a quello della deviazione dell' influente, sta reciprocamente, come la velocità dell' influente a quella del recipiente avanti il concorso; perchè il seno dell' angolo K G H, a quello dell' angolo H G I, o dell' alterno G H K, sta come H K, cioè I G, a G K.

Co-

Corollario VI.

Stante la stessa velocità G K del recipiente prima del concorso, e la stessa inclinazione de' fiumi K G I, ovvero F G L, quanto maggiore sarà la velocità G I dell'influente, tanto maggiore sarà la deviazione di esso recipiente, cioè maggiore l' angolo K G H, perchè crescendo G I, cresce K H, che corrisponde al suo seno.

Corollario VII.

E maggiore ancora in detto caso risulta la nuova velocità G H del recipiente dopo il concorso, perchè crescendo K H, e l'angolo G K H, non minore del retto, stando il medesimo, siccome ancora rimane lo stesso il lato G K, dee crescere la base G H del triangolo G K H.

Corollario VIII.

Ma stante la medesima velocità G I dell' influente, e la stessa inclinazione de' fiumi, tanto maggiore sarà la deviazione del recipiente, quanto sarà minore la velocità G K, ovvero I H, di cui egli era dotato, facendosi più aperto l'angolo K G H, e minore l'angolo H G I, secondo che il punto H nel lato I H raccorciato, si va più accostando al punto I.

Corollario IX.

E la velocità nuova G H del recipiente dopo il concorso, si fa allora tanto minore, sottendendo lo stesso angolo G I H non minore del retto, collo stesso lato I G, ma con un lato I H raccorciato.

Corollario X.

Quanto minore è l'angolo dell'inclinazione de' fiumi I G K, tanto maggiore è la nuova velocità G H risultante nel recipiente dopo il concorso, stanti le stesse velocità dell' influente, e del recipiente prima dell' influenza: perchè tanto maggiore si fa l'angolo G K H supplemento della detta inclinazione I G K a due retti, e però essendo i medesimi lati G K, G I esprimenti le velocità d'ambi i fiumi divisi, riesce maggiore la sottotesa G H, misura della nuova velocità.

Corollario XI.

La detta nuova velocità G H è però sempre minore della somma d'ambe le velocità G K, e G I, ovvero K H de' fiumi confluenti, essendo sempre due lati maggiori del terzo.

Corollario XII.

Quanto maggiore è l'angolo dell'inclinazione de' fiumi I G K (purchè non sia ottuso, come di fatto in pratica non suole accadere, nè potrebbe così mantenersi lungamente) tanto sarà maggiore la deviazione di ciascuno de' confluenti, come quella dell'influente I G H; imperocchè quanto

maggiore è l'angolo I G K, tanto minore è il suo supplemento a due retti G I H; descrivendo adunque col centro I, e col raggio I H l' arco circolare Y H D, se si ristringe l' angolo G I H, e si faccia diventare come G I D minore di G I H, e si compisca il parallelogrammo G I D Z, per essere la retta I D superiore alla I H, congiungendo G D sarà maggiore l' angolo della deviazione I G D, che non era il primo I G H. Nella stessa maniera si proverà, che diventerà maggiore ancora la deviazione H G K del recipiente, diventando D G Z, descrivendo il cerchio col raggio K H.

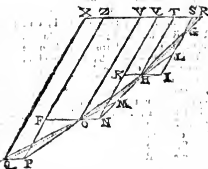
SCOLIO I.

Vi ha chi pretende nella ricerca della direzione composta dopo il concorso de' fiumi, doversi porre i lati G K, G I proporzionali non già alle velocità de' fiumi concorrenti, come si è fatto di sopra, ma piuttosto alle forze motrici di essi fiumi, le quali da noi ancora nella Proposiz. 25. sono state dimostrate in ragione composta delle sezioni, e de' quadrati della velocità. Ma questi doveano osservare, che la dimostrazione del moto per diametro composto de' moti per ambi i lati di un parallelogrammo, unicamente dipende dal farsi nello stesso tempo l'uno, e l' altro de' moti componenti, ed il moto che ne risulta composto; ed in conseguenza esige i lati proporzionali alle velocità impresse nel mobile, e non alle forze, da cui viene spinto; che se alle volte si prendono i lati proporzionali alle forze, ciò accade solo, quando si suppone, che le dette forze applicate ad uno stesso mobile v' imprimano le velocità proporzionali a loro stesse: stimandosi appunto la grandezza delle forze, secondo il grado di velocità che possono imprimere ad uno stesso mobile, standovi applicate nella stessa maniera, e nel medesimo minimo spazio di tempo. Nel nostro caso adunque de' fiumi, supponendosi che il galleggiante G, di cui ci siamo serviti nella proposizione, sia del tutto indifferente al moto, e si lasci trasportare da quelle correnti, che lo involgono, dovrà esso muoversi con quelle stesse velocità, colle quali andavano gli stessi fiumi divisi, e che poi va il tronco unito; e però i lati G I, G K esprimenti le velocità impressegli separatamente da ciascun fiume, debbono necessariamente esprimere ancora le velocità, con cui l'uno, e l'altro fiume separatamente si muove. Tanto più, che non tutto il fiume influente, nè tutto il recipiente colle forze loro si applicano a muovere il galleggiante, ma solo al più una parte di ciascuno eguale al massimo cerchio del globo; nè l' influente O Q X P urta nel suo corso con tutto il recipiente B A X C per vasto che siasi:

ma solo colla parte A N uguale alla sezione O Q dell' influente medesimo. E perchè le forze di moli eguali d'acqua, o di porzioni eguali d'altra materia, sono come le loro velocità; quindi è, che volendo ancora porre i lati G K, G I proporzionali alle forze de' fiumi, che s' incontrano in una medesima sezione, prescindendo ancora dalla finzione di quel galleggiante, e considerando, che l' urto si fa in parti eguali d' acqua dell' uno, e dell' altro fiume, dovranno prendersi i detti lati appunto proporzionali alle velocità d' entrambi i confluenti, e non alle assolute, ed intere loro forze, che non tutte si applicano a cozzare insieme nella confluenza.

SCOLIO II.

E' ben vero, che essendo il recipiente con notabil vantaggio maggiore dell' influente, la direzione composta, e determinata come sopra, tornerà presto a distornarsi: perchè oltre quella parte del recipiente contigua all' influente, la quale contrasta con esso nel primo incontro dell' unione, l'altra parte del recipiente, che scorre lungo la ripa opposta, e poco, o nulla viene urtata dall' influente vicino allo sbocco del medesimo, seguita a un dipresso a scorrere per qualche tratto colla direzione sua appena sensibilmente alterata, finchè s' incontra più abbasso colla nuova direzione composta, che ha preso il recipiente mescolato coll' influente; onde si fa una nuova deviazione, rispingendosi vie più l' acqua verso la ripa contigua all' influente, e scostandosi dalla opposta, sicchè non venga a batterla tanto presto, ma alquanto più in giù: Queste replicate deviazioni, che si vanno cagionando delle parti susseguenti, fanno come una curva, la quale torna a restituire al recipiente la primiera sua direzione, ma con una velocità molto maggiore.



Imperocchè si ripigli il triangolo G I H di cui G I rappresenta la velocità, e direzione dell' influente, I H quella del recipiente avanti il concorso, e G H la composta d'ambidue. Prolungata G H altrettanto in N, e condotta N O parallela, ed eguale ad I H, sarà la H O la susseguente direzione, e velocità, composta delle due H N, N O, cioè della prima composta G H, e della H I, che si conserva, come prima del concorso, nelle parti del fiume, non per anco raggiunte dalla spinta dell' influente; e di nuovo prolungata H O altrettanto in P, e posta P Q parallela, ed eguale ad N O, ovvero ad I H, congiungendo la O Q si averà in essa la direzione, e velocità, che in terzo luogo si compone dalla seconda composta H O, ovvero O P, e dalla P Q, ovvero I H, che si mantiene nelle parti ulteriori dell' acqua, e così di mano in mano. Ove si vede, che l' angolo della deviazione del recipiente sempre più si ristrigne, diventando di I H G, N O H, e poi P

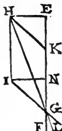
Q O, ed accostandosi sempre più la direzione composta alla prima direzione del recipiente, perchè O H prolungata verso L divide l'angolo I H G, e taglia per mezzo G I in L, e di nuovo Q O prolungata verso M, divide l'angolo N O H, tagliando per mezzo N H in M, e così sempre; ed essendo N H, cioè G H maggiore di G I, come opposta all' angolo ottuso G I H, ed N O eguale ad I H, e l' angolo O N H eguale ad I H N maggiore di H I G, la sottotesa O H sarà maggiore della N H, cioè della H G; e similmente la O Q maggiore di O P, cioè di O H; sicchè sempre si fa maggiore la velocità composta in infinito. Anzi talvolta è tale la forza delle parti del recipiente contigue alla sponda opposta allo sbocco del recipiente, che obbliga l'acqua di questo a tenersi quasi tutta dalla sua banda: come si riconosce allorchè l' influente è torbido, trovandosi chiaro il recipiente, o viceversa qualora è chiaro l' influente, ritrovandosi torbido il recipiente; perchè allora sensibilmente si distingue, l'acqua nuovamente entrata nell'alveo tenersi tutta per lungo tratto contigua alla propria sponda, senza quasi mescolarsi con quella del recipiente. Così fu notato nel Tesino, e nel Panaro influenti del Po, nelle visite fatte in quelle parti per pubblica autorità, e si ha registrato negli atti autentici di quelle Commissioni.

Ma per tornare alle suddette deviazioni infinite del recipiente, può notarsi di passaggio, che i punti G, H, O, Q, ed altri che in infinito si possono in simigliante maniera determinare, sono in una parabola, da determinarsi come appresso. Si prolunghi I G in S, e facciasi G S eguale alla metà di G I: per lo punto S tirisi la R T parallela ad I H, e fatta S R eguale all'ottava parte di H I, col lato retto eguale al duplo della terza proporzionale dopo H I, I G si descriva, per la cima R al diametro R T, nell'angolo G S R la parabola R G H O Q; questa passerà per tutti i punti sopra determinati; perchè condotte le H T, N Y, O V, P Z, Q X parallele alla G S; siccome I S è tripla di G S, così H T è tripla della medesima, onde il quadrato H T sta al quadrato G S, come 9. ad 1.; ma essendo R S eguale $\frac{1}{8}$ d' H I, cioè T S eguale ad un 8, e però ancora T R ad R S stà, come 9. ad 1.; dunque T R ad R S stà, come il quadrato di H T al quadrato G S. In oltre, siccome N G è dupla di G H, così Y S è dupla di T S, cioè di H I, a cui è eguale N O, ovvero V Y. dunque Y S è 16. e V S è 24, e V R sarà 25; ma per essere N K eguale ad I G, come N H uguaglia H G, tutta la N Y è quintupla di G S; dunque ancora il quadrato di N Y, anzi di O V, sta al quadrato G S, come 25. ad 1, cioè, come V R ad R S. Parimente per essere V Z eguale ad V T, siccome O P uguaglia O H, ed X Z eguale a P Q; cioè ad H I, averemo tutta la X R alla R S, come 49 ad 1. e per essere P F eguale ad N K, cioè ad I G, tutta la P Z, cioè la Q X è eguale a 7. G S, onde il quadrato Q X al quadrato G S sta, come 49 ad 1., cioè come X R ad R S; dunque i punti G, H, O, Q e simili sono nella stessa parabola sopra determinata, corrispondendo all' ordinate S G, T H, V O, X Q crescenti nella ragione de' numeri dispari 1. 3. 5. 7. ec.

SCOLIO III.

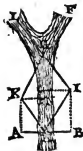
Se le ripe del reeipiente allo sbocco dell' influente, e poco sotto di esso, non cedessero all'impressione fatta dal concorso de' fiumi, allora non si muterebbe direzione dal recipiente, ma si manterrebbe in quella di prima, acce-

crescendosi però l'antica sua velocità di tal parte, che stia alla velocità dell'influente, come il seno di compimento dell'inclinazione de' fiumi, al seno totale: imperocchè non potendo il recipiente F G torcersi in G H, ma essendo obbligato dalla resistenza delle ripe a tenersi sulla direzione F G K, eserciterà in essa la velocità G E determinata dalla H E perpendicolare sopra G K tirata dal punto H, risolvendosi la velocità G H impressavi dall'urto vicendevole de' fiumi, nelle due G E, E H, delle quali questa resta inutile, essendo direttamente opposta alle ripe, che sostengono la sua impressione, senza lasciarle avere alcuno effetto; ed era G K la velocità del recipiente; e la parte K E sta alla K H, ovvero G I velocità dell'influente, come il seno di compimento dell' angolo E K H, ovvero I G K, per cui sono i fiumi inclinati l'uno all'altro, al seno totale; onde ec.



PROPOSIZIONE XXVII.

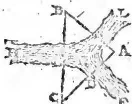
Benchè le due velocità dell' influente, e del recipiente G I, I H prese insieme sieno assolutamente maggiori della nuova G H risultante dal concorso di essi come nel coroll. XI. della precedente; tuttavolta sono eguali quelle a questa, rispettivamente al piano della sezione nell'alveo comune.



Tirisi per lo punto H la retta A B perpendicolare alla direzione nuova G H, risultante dalle due concorrenti G I, G K. Sieno condotte ancora le perpendicolari I C, K N sopra G H, e I B, K A sopra B A. La velocità del fiume L G, che è G I ovvero K H, si può intendere composta delle due K A perpendicolare al piano della sezione A B, e della K N parallela alla detta sezione. In quanto la velocità K H ha in se la velocità K N, non fa veruna impressione sul piano della sezione A B, che gli è parallelo, ma solamente inquanto importa la velocità perpendicolare K A, con cui urta in esso. E però la velocità del fiume L G, che assolutamente è come K A, in ordine al piano della sezione A B del tronco comune non conta, se non come K A, ovvero N H. Similmente si mostrerà, che la velocità G K, ovvero I H dell'altro fiume F G, rispettivamente allo stesso piano A B della sezione del tronco unito non può valutarsi, se non come la perpendicolare I B, cioè quanto la G N, riuscendo l'altra porzione I C vota di effetto, per essere parallela a B A, ed inoltre per essere eguale, e direttamente opposta all'altra K N, sicchè ambidue vicendevolmente si distruggono. Ma le due N H, G N uguagliano appunto l'intiera G H; dunque le velocità particolari de' fiumi confluenti, prese in riguardo al piano della sezione del tronco, in cui comunemente si uniscono, pareggiano la velocità nuova della direzione composta, e risultante da esse. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

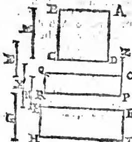
Date le direzioni F G, L G di due fiumi concorrenti, e la direzione G H dell' alveo comune, in cui si uniscono, trovare la proporzione delle velocità di ciascuno.



Si conducano a ciascuna delle date direzioni, per qual punto si voglia le perpendicolari D C, E B, I A, che incontrandosi formeranno il triangolo A C B (altrimenti non converrebbero insieme nè meno le direzioni de' fiumi, contro l' ipotesi) dico che la velocità del fiume F G, è come A C, quella del fiume L G, come A B, e l' altra del fiume G H, come C B. Imperocchè nel quadrilatero D G E C, essendo retti gli angoli in D, ed E, saranno gli altri due D G E, D C E eguali a due retti, e averanno lo stesso seno. Similmente sarà lo stesso seno degli angoli I B E, I G E; e lo stesso quello degli angoli I G D, I A D: ma per li corollarj 3. 4. 5. della prop. 26. la velocità dell' influente, del recipiente, e del tronco unito, sono per ordine, come i seni della deviazione del recipiente, della deviazione dell' influente, e dell' inclinazione d' ambi i fiumi concorrenti; dunque la velocità di L G, a quella di F G, e di G H sta respettivamente, come il seno di D G E, o sia dell' angolo C al seno di I G E, cioè dell' angolo B, ed al seno di I G D, ovvero dell' angolo A: ma i seni di detti angoli sono proporzionali agli opposti lati A B, A C, C B; dunque le velocità ricercate sono come i lati del suddetto triangolo A B C perpendicolari sopra ciascuna direzione; Il che ec.

PROPOSIZIONE XXIX.

Date le quantità dell' acqua, che debbano scaricare in un dato tempo li due fiumi, le cui sezioni A C, O R, e le velocità M, N, confluenti in uno stesso alveo comune, la cui larghezza data I H, colla velocità G, che da tale concorso risulta, ritrovare l' altezza I F, che dee fare l' unione di dette acque.



Trovisi per la Proposizione 21. la velocità ragguagliata E d' ambi i fiumi confluenti, ed applicando alla retta O Q larghezza della sezione O R la superficie dell' altra sezione A C, ne risulti l' altezza O Z, sicchè il rettangolo Z P R uguagli la somma di ambe le sezioni date: dunque la stessa quantità d' acqua, che passava per le dette sezioni, passerà per la sola Z P R, colla velocità ragguagliata E, si faccia dunque: come il prodotto della nuova velocità G, e della larghezza I H dell' alveo comune, al prodotto di E nella larghezza P R, così l' altezza P Z ad un' altra I F. Questa sarà l' altezza, che si cercava; imperocchè tant'

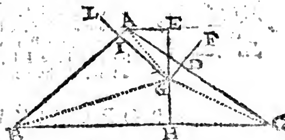
acqua smaltirà la sezione F I H colla velocità G, quanta ne tramanderebbe l'altra sezione Z P R colla velocità E: cioè quanta ne portavano insieme i due fiumi concorrenti, per essere il prodotto di G nella sezione F I H, eguale al prodotto di E nella sezione Z P R. Il che ec.

SCOLIO.

Per la pratica si spedisce il quesito aritmeticamente, congiungendo insieme le due quantità d'acqua portate da' fiumi, e dividendo la somma per il prodotto della nuova velocità dell'alveo comune nella sua larghezza. Sia per esempio A D 7. piedi, D C 130., onde tutta la sezione piedi quadri 910., la sua velocità sia tale, che faccia 4. miglia l'ora, e si tassi per gradi 4 e però la portata della sua acqua sarà 3640. sia altresì O P piedi 15. P R piedi 500.. onde la sezione O P R Q piedi quadri 7500. la sua velocità sia di gradi 6. e però la portata della sua acqua si valuti 45000. La larghezza dell'alveo comune I H sia 505., la velocità G gradi 6., e un cinquantesimo, il prodotto di questi due termini sarebbe 3040 e un decimo ovvero 30401 decimi, per cui dividendo la trovata somma dell'acque portate da ambidue i fiumi, si ha per quoziente quasi 16. piedi, cioè precisamente 16, meno sedici parti denominate dal numero 30401. e tanta sarà l'altezza I F risultante nell'alveo comune.

PROPOSIZIONE XXX.

Date le direzioni F G, L G di due fiumi concorrenti in un alveo comune, la cui direzione G H, e date le sezioni de' due primi, ritrovare la sezione del terzo, e la velocità di ciascuno.



Si faccia G D a G I, come la sezione del fiume G F a quella nel fiume G L, e condotte per D, e per I, le perpendicolari C D A, B I A alle date direzioni, dal punto del concorso A si tiri la perpendicolare A E sopra la terza direzione G H dell' alveo comune, prolungata oltre l' angolo F G L, quanto bisogna: ed alla G E posta eguale la G H, tirisi ad essa la perpendicolare C H B, che chiuda il triangolo A B C, e si congiungano le A G, B G, C G. Dico, che la sezione dell' alveo comune sarà, come G E, ovvero G H, in relazione all' altre due sezioni rappresentate dalle G D, G I, e che le velocità di ciascun fiume saranno, come i lati A C, A B, B C perpendicolari alle loro direzioni, e comprendenti il triangolo A B C. Questo secondo già resta dimostrato nella prop. 28. Il primo si dimostra così. I triangoli A C G, A G B sono in la ragione composta di quella delle basi A C, A B, rappresentanti le velocità de' fiumi F G, L G, e di quella dell' altezze G D, G I esprimenti le sezioni di essi fiumi: ma ancora le quantità d'acqua da essi portate sono in ragione composta di quella delle velocità, e di quella delle sezioni per la prop. 5.; dunque i detti triangoli A C G, A G B sono, come le quantità

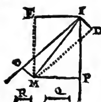
tità d'acqua portate da' fiumi F G, L G; ma per essere G H eguale a G E, cioè la metà della E H, altezza del triangolo A C B, sarà il triangolo C G B la metà di esso A C B, e conseguentemente eguale alla somma dei triangoli A G C, A G B, siccome la quantità d'acqua, che porta dee l'alveo comune G H, dee perappunto uguagliare le due quantità portate dagli due fiumi in altr'e tanto tempo. Sta dunque il triangolo C G B al triangolo C G A come la quantità d'acqua portata dall'alveo comune G H alla quantità portata dal solo fiume F G, cioè in ragione composta delle velocità C B, C A, e delle sezioni; ma è ancora in ragione composta delle basi medesime C B, C A, e dell'altezze G H, G D, dunque stanno queste come le sezioni, onde esprimendo G D la sezione del fiume F G, esprimerà G H la sezione dell'alveo comune; il che ec.

SCOLIO.

In molte altre maniere si può sciogliere lo stesso problema, premesso però il seguente

Lemma.

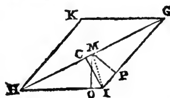
Dividere l'angolo dato P I O, in maniera, che i seni degli angoli P I M, M I O abbiano una data ragione di Q ad R.



Si alzi sopra il lato P I la perpendicolare I E, e sopra il lato I O la perpendicolare I D, tagliando I E, e I D nella data ragione di Q ad R; e per lo punto E tirando E M parallela ad I P, e per D la D M parallela ad I O, dove s'incontrano in M si congiunga I M, e conducansi le perpendicolari M P, M O sopra i detti lati, è manifesto, per essere M P eguale ad I E, ed M O eguale ad I D, che i seni degli angoli P I M, M I O; preso per raggio I M sono le stesse I E, I D, cioè nella data ragione di Q ad R; il che ec.

PROPOSIZIONE XXXI.

Ritrovare in un'altra maniera la sezione dell'alveo comune date le sezioni de' fiumi confluenti.



Sia il solito parallelogrammo G K H I, che esprime le velocità, e direzioni de' fiumi divisi, e del tronco unito, co' lati G K, G I, e col diametro G H. Si tiri sopra G H dall'angolo I la perpendicolare I C, ed esso angolo dividasi colla retta I M in maniera, che il seno dell'angolo G I M a quello dell'angolo H I M, stia come la sezione del fiume G I alla sezione del fiume G K, e tirinsi le perpendicolari M P, M O

M O sopra i lati G I, I H. Dico che, esprimendo i seni M P, M O le sezioni de' fiumi confluenti, esprimerà la perpendicolare I C la sezione ricercata dell'alveo comune. Perchè il triangolo G M I al triangolo I M H è in ragione composta di G I ad I H (che sono le velocità de' fiumi confluenti) e di M P ad M O (che sono le loro sezioni) ed anche la quantità dell'acqua portata dal fiume G I a quella portata dall'altro è in ragione composta delle medesime, starà quel triangolo a questo, come la quantità d'acqua del primo fiume alla quantità del secondo, e componendo, il triangolo G I H al triangolo I M H starà come la somma delle due quantità d'acqua portate da ambi i fiumi (cioè come l'acqua che si scarica per l'alveo comune colla velocità G H) all'acqua sola del secondo confluente, e però in ragione composta di G H ad H I (che sono le velocità) e della sezione dell'alveo comune, alla M O che rappresenta la sezione del secondo fiume; ma il triangolo G I H al triangolo I M H è ancora in ragione composta di G H ad H I, e di I C ad M O, dunque I C rappresenterà la sezione dell'alveo comune, in relazione delle M P, M O esprimenti le sezioni de' fiumi confluenti, il che ec.

PROPOSIZIONE XXXII.

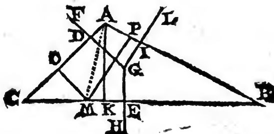
Date le quantità d'acqua portate da' fiumi confluenti, ritrovare la ragione delle loro sezioni, e di quella dell'alveo comune, supposte, come sopra, le direzioni, e velocità loro.

Si faccia, come la quantità dell'acqua, che porta il primo fiume G I, a quella che porta l'altro confluente, così G M ad M H. Condotte le perpendicolari M P, M O, I C sopra i lati, e sopra il diametro del solito parallelogrammo G I H K, si rappresenteranno da esse rispettivamente le sezioni del primo, e del secondo confluente, e dell' alveo comune perchè come G M ad M H, così stanno i triangoli G M I, M I H, saranno questi, come la quantità dell'acqua portata da' fiumi confluenti; e tutto il triangolo G I H, come la quantità portata dall'alveo comune; però li detti triangoli saranno in ragione composta delle velocità rispettive di ciascun fiume, e del comune tronco, e delle loro sezioni; ma sono ancora in ragione composta delle basi, e dell'altezze, dunque essendo le basi G I, I H, G H omologhe alle velocità, saranno l'altezze M P, M O, I C come le sezioni; il che ec.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Date le stesse cose, trovare le medesime sezioni in altra maniera.

Si ripigli il triangolo A B C fatto dalle perpendicolari condotte sopra ciascuna delle date direzioni de' fiumi L G, F G, G H, ed esprimenti le loro velocità, come nella Prop. 28., e il lato B C omologo alla velocità dell'alveo comune G H, dividasi in M, di maniera che stia B M ad M C, come la

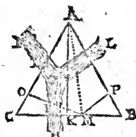


quan-

quantità d'acqua portata dal fiume G L a quella che porta l' altra F G; ed in conseguenza tutta la B C sarà come la quantità d'acqua, che dee scaricarsi per l'alveo comune G H: onde ancora i triangoli A B M, A M C, A B C, saranno come le dette quantità d'acqua, cioè in ragione composta delle velocità A B, A C, B C, e delle sezioni rispettivamente de' fiumi L G, F G, G H; ma condotte le perpendicolari M P, M O dal punto M ne' lati, e A K dall'angolo A sulla base, sono i detti triangoli A B M, A M C, A B C ancora in ragione composta delle basi A B, A C, B C, e dell'altezze loro M P, M O, A K: dunque saranno queste perpendicolari, come le sezioni per ordine de' fiumi L G, F G, G H; Il che ec.

Corollario I.

Se i due fiumi L G, F G fussero inclinati ad un angolo L G F di 120. gradi, e fussero egualmente veloci, onde il tronco unito G H egualmente deviando da ambedue, farebbe altresì a ciascuno di essi inclinato ad un pari angolo di 120. gradi, e però il triangolo A B C averebbe ciascun angolo di 60. gradi, cioè sarebbe equilatero, allora la somma delle sezioni d'amendue i fiumi confluenti uguaglierebbe la sezione dell' alveo comune: perchè essendo A C eguale ad A B, la somma de' triangoli A M C, A M B uguaglia un triangolo, che abbia per base A C, e per altezza la somma delle perpendicolari M O, M P; la detta somma uguaglia altresì il triangolo intero A B C, la cui base è B C, e l'altezza A K, dunque essendo A C eguale a B C, sarà ancora A K eguale alla somma delle due perpendicolari M O, M P, e le dette perpendicolari sono come le sezioni de' fiumi: dunque le due sezioni de' fiumi L G, F G uguagliano la sezione del tronco unito G H, o siano i confluenti d'eguale portata d'acqua (nel qual caso il punto M coinciderebbe col punto K, e le sezioni M P, M O sarebbero anch'esse eguali) o siano di diversa portata d'acqua, ma egualmente veloci, dividendosi B C nel punto M in parti disuguali.



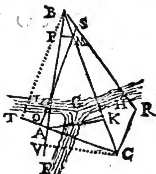
Corollario II.

Ma se detti fiumi confluenti, essendo egualmente veloci, non fussero inclinati al detto angolo di 120. gradi, ma ad un altro qualsivoglia, sarebbe generalmente la somma delle loro sezioni alla sezione dell' alveo comune, come la velocità di questo alla velocità di ciascuno di quelli; perchè il triangolo A B C sarà isoscele, colla base B C disuguale a' lati, ma per le cose dette nel coroll. antecedente sarà la somma delle due perpendicolari M O, M P alla perpendicolare A K, come la base B C al lato C A, e però la somma delle sezioni de' confluenti alla sezione dell' alveo unito, come la velocità dell'alveo comune alla velocità di ciascheduno de' confluenti, o sia la portata dell'acqua loro eguale, o no.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIV.

Essendo la medesima quantità d'acqua, che tra tutti e due i confluenti L G, F G portano nell' alveo comune G H, quanto più disugualmente sarà distribuita fra essi, di maniera che il più veloce ne porti meno, avendo ancora minor sezione, tanto maggiore sarà la somma delle sezioni d'ambidue i confluenti.



Perchè fatto il solito triangolo A B C, che rappresenta le velocità di ciascuno, ed espressa la quantità dell'acqua, che portano insieme ambidue i fiumi nell' alveo comune, per lo lato B C; dividendolo, come nella Prop. precedente in M, sicchè stia C M ad M B, come la quantità d'acqua del fiume F G a quella dell' altro L G, se questo è il più veloce, sarà B A maggiore di C A; e l'angolo B C A maggiore dell' altro C B A, e la perpendicolare B T (che è il seno di quello, prendendo per raggio C B) maggiore della perpendicolare C V [che similmente è il seno di questo] e posta C R perpendicolare al lato C A, e eguale alla perpendicolare C V, congiunta R B, se per lo punto M si tireranno le perpendicolari M P sopra il lato B A, ed M O sopra il lato C A, prolungata O M al concorso di R B in S, sarà M S eguale ad M P, come C R uguaglia C V, e però la somma delle perpendicolari M P, M O, sarà eguale ad S O; ma nel trapezio B T C R, essendo B T maggiore della parallela C R eguale a C V, le rette B R, T C prolungate converrebbero dalla parte di R C, e però le parallele ad essa, come O S si fanno minori, secondo che più si accostano ad R C, e maggiori secondo che più si avvicinano alla B T, cadendo il punto M più vicino al punto B. Dunque secondo che la quantità dell'acqua C B portata da i due confluenti F G, L G sarà distribuita più disugualmente, di maniera, che il più veloce L G colla sua sezione minore M P ne porti minor porzione M B, e l'altro meno veloce F G colla sua maggior sezione M O, ne scarichi la maggior parte C M, la somma delle loro sezioni M P, M O sarà necessariamente maggiore, che se crescesse la quantità dell'acqua portata dal primo, e diminuisse altrettanto quella del secondo. Il che ec.

Corollario.

Si osservi, che dalla sezione del fiume L G portando assai minor copia d'acqua B M, della quantità M C portata dall'altro fiume F G, la sezione di questo M O riesce molto maggiore della sezione A K del tronco unito G H, essendo M O ad A K nella stessa ragione di C M a C A. Sicchè quindi ancora s'inferisce, che avendo maggior ragione la quantità d'acqua C M del recipiente F G alla somma delle quantità C M, M B portate dal detto recipiente, e dall'influente L G, che non ha la velocità C A del recipiente avanti il concorso, alla velocità C B dell' alveo comune, sempre la sezione di questo riesce minore della sezione di quello, ed essendo in pari larghezza, l'altezza dell' acqua scema in vece di crescere per l'unione dell'influente L G.

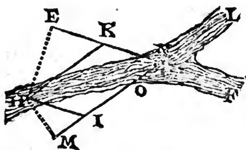
CA-

CAPITOLO V.

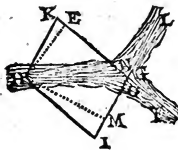
Della divisione di un fiume in più rami.

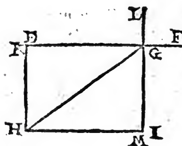
PROPOSIZIONE XXXV.

SE i due fiumi orizzontali L G, F G, mossi colle velocità G I, G K si uniscano in un tronco, la cui velocità, e direzione sarebbe G H; e poi viceversa si supponga, che lo stesso tronco H G colla stessa velocità H G dovesse con moto retrogado diramarsi ne' due rami G L, G F, non restituirà loro le velocità I G, K G uguali alle prime, se non quando l' angolo L G F fusse retto.



Perchè quando il detto angolo sia acuto, ovvero ottuso, tirate dal-punto H le perpendicolari H F, H M sopra le direzioni G K, G I, si consideri che il moto per la direzione H G si comporrà del moto per la direzione E G, e di quello per la perpendicolare H E; dunque la porzione dell' acqua, che si deriva per l' alveo G F, vi anderà affetta di queste due velocità, una come E G parallela alla stessa direzione G F, l' altra come H E per una direzione perpendicolare alle ripe, dalla resistenza delle quali verrà impedito il suo effetto, onde rimarrà viva la sola velocità E G nell' acqua diramata pel canale G F, e con questa velocità dovrà muoversi, non colla primitiva sua velocità G K, con cui era venuta nell' alveo comune. Similmente si proverà, che pel ramo G L sarà derivata l' acqua colla velocità G M, non colla primitiva G I, da cui era affetta nell' unirsi alla confluenza; dunque non ritornerebbero l' acque ne' suoi canali, diramandosi dal tronco suo comune, colle medesime velocità, con cui si erano unite ad esso; eccetto che, quando l' angolo F G L (come nella altra fig.) fusse retto, perchè allora le perpendicolari H E, H M confondendosi co' lati H K, H I, le velocità derivate ne' rami sarebbero eguali alle loro primitive. Il che ec.





Corollario.

E' manifesto, che le velocità E G, M G da derivarsi ne' rami sono maggio-

giori delle loro primitive G K, G I, quando l'angolo L G F della confluenza è acuto (*fig.* 1.) Ma quando è ottuso [*fig.* 2.] allora sono minori quelle di queste.

SCOLIO.

Per intender bene la ragione di tale diversità, si osservi, che in tanto nel primo caso dell'angolo acuto, le velocità G K, G I componevano la velocità G H, la quale perfettamente si compone delle due H E, E G, ovvero delle due H M, M G, in quanto ciò che mancava di velocità ad uno de' fiumi confluenti nella sua direzione, veniva appunto supplito dall' altro. Per esempio il fiume F G da se stesso non avrebbe potuto contribuire all'alveo comune, se non la velocità G K secondo la sua direzione; ma l'altra velocità del fiume L G, cioè G I, o pure K H, suppliva il residuo della velocità K E, ed aggiungeva di più la velocità secondo la perpendicolare H E (mercecchè la stessa velocità K H si compone perfettamente delle due suddette K E, H E, ed in esse può risolversi) sicchè da' due fiumi confluenti veniva così comunicata al tronco unito la velocità G E, colla velocità E H, dalle quali si compone la stessa G H.

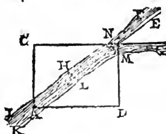
Similmente nel secondo caso dell'angolo L G F ottuso, è vero che il fiume F G avrebbe da se portato nell'alveo comune tutta la velocità G K, di cui per la sua direzione era affetto; ma l' altro confluente L G comunicandovi la sua velocità G I, ovvero K H, la quale si risolve nelle due K E, E H, viene a distruggere colla velocità K E contraria quella porzione E K di tutta la velocità G K comunicata dal primo fiume F G, e però resta nell' alveo comune la sola velocità G E, coll' altra E H, le quali perfettamente compongono la detta G H.

Ma quando il comune tronco H G si dee viceversa diramare ne due canali G F, G L, non si può il moto G E talmente distribuire, che nel caso dell'angolo acuto la sola parte K G passi nell'alveo G F, e l'altra parte K E si restituisca all'alveo G L, non essendovi comunicazione tra l'acque distribuite in diversi canali, sicchè l' una possa contemperare la velocità dell'altra: e similmente nel caso dell'angolo ottuso, non può la velocità G K risvegliarsi interamente, dopo d' essere stata la sua porzione E K smorzata dalla contraria velocità K E; e però nell'alveo G F passerà la velocità E G, siccome nell'altro G L la sola M G.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Si può dar caso, che dello stesso fiume K N, una parte si derivi nel canale B G deviando dal suo corso, continuando l' altra parte pel canale B E colla stessa direzione, e velocità di prima.

Perchè scorrendo tutte la parti del fiume K N con moto parallelo alle ripe, ancorchè l'intendessimo diviso in due canali separati da un sottilissimo piano A B interpostovi, parallelo anch' esso alle medesime ripe, tanto seguiterebbe ciascuna parte del fiume così diviso a scorrere colla stessa direzione, e velocità, non potendo essere impedita, nè alterata dall' interposizione di esso piano, prescindendo da ogni soffregamento, che potesse accadere nell'accostarsi ad esso le parti dell' acqua, che non credo possa alcuno pretendere doverſene fare un minimo conto. Dunque continuandosi la



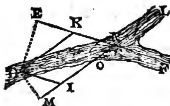
si la ripa B E del canale B F col detto piano immaginario A B, dovrà esso canale con pari facilità ricevere l'acqua, che gli si tramanda proporzionata alla sua larghezza dell'alveo A N: nè potrà la deviazione dell'acqua residua K B nel canale G B punto ostare al diretro progresso della suddetta porzione A N pel ramo B F; perchè quantunque la velocità A B, comune alle due parti K B, A N, dell'alveo K N, si risolva nelle due collaterali A C, C B, ovvero A D, delle quali la sola A D, o C B serve a promuovere l'acqua distornata pel canale G B, e l'altra A C, se urtasse nell'acqua del canale contiguo B F, potrebbe distornarla dalla primiera sua direzione: tuttavolta il massiccio G B E della ripa interposta a questi canali, sostenendo tutto l'impeto A C, che gli è perpendicolare, non permette, che veruna alterazione possa apportare all'acqua, che direttamente continua il suo viaggio pel canale B F. Il che ec.

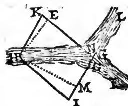
SCOLIO.

Quindi ancora si conferma la verità della Prop. precedente, cioè che se due fiumi si uniscono in un solo, componendo nell'alveo comune una certa velocità risultante da quelle de' confluenti, non ne segue, che viceversa dovendo un fiume dotato della detta velocità diramarsi in due canali egualmente inclinati al tronco, come erano prima li due confluenti, ed egualmente capaci, debba restituirsi a ciascuno di essi la medesima velocità componente, che prodotta avea la velocità del comune tronco; imperocchè se dovessero i canali F B, G B concorrere in un solo tronco, andando il primo colla velocità B A, il secondo colla B C, non sarebbe possibile, nè che si mantenesse il tronco unito sulla direzione B A propria del primo influente, se non per qualche violenta resistenza insuperabile nelle ripe così artifizialmente disposte; nè che potesse camminare colla sola velocità B A del medesimo primo canale; e pure secondo questa proposizione può il tronco K N diramarsi naturalmente ne' due rami B F, B G, ritenendo in un solo di essi la prima direzione, e l'antica velocità A B. Il che avviene, perchè se si unissero l'acque F B, G B nel tronco B A, non potrebbero fare a meno, per l'inclinazione del corso loro, di non urtarsi vicendevolmente, e così cagionare nell'unione dell'acque una direzione, ed una velocità composta delle direzioni, e velocità loro particolari; laddove scorrendo l'acqua pel tronco comune K N fino all'imboccature B N, B M de' due canali, non si urta altrimenti, ma cammina parallela alle sponde, e però quella che si torce nel canale B G non può alterare il corso di quella, che proseguisce a scorrere continuatamente per l'altro ramo B F posto in diritto col tronco principale.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Date le direzioni de' canali G L, G F, ne' quali dee diramarsi il fiume H G, la cui direzione, e velocità si esprima colla stessa H G, determinare le velocità da comunicarsi a ciascuno di quelli.





Tirinsi le perpendicolari H M, H E sopra le date direzioni G L, G F. Dico che la velocità da comunicarsi al canale G L sarà M G, e quella da comunicarsi all' altro ramo G F, sarà E G. Imperocchè dividasi mentalmente con un piano verticale G H il tronco superiore in due fiumi contigui, e paralleli, H N, H O; e si concepisca, che l' acqua del canale H N trovando l' ostacolo in G è forzata a piegarsi nell' alveo N L, siccome ancora l' acqua dell' altro contiguo canale H O è obbligata a piegarsi per l' alveo G F; dunque per la prop. 9 la velocità del fiume N nell' alveo H G starà alla velocità dopo il suo piegamento per G L, come il seno totale al seno di compimento della sua deviazione H G I, cioè come H G ad M G. Similmente torcendo il fiume H O dalla direzione H G nella G F, starà la sua velocità per H G a quella per G F, come il seno totale H G al seno di compimento della sua deviazione H G K, che è la E G; dunque le dette linee M G, E G esprimono le velocità, colle quali si dirama l' acqua del tronco H G ne' rami G L, G F; il che ec.

Corollario I.

Se gli alvei G L, G F saranno egualmente inclinati al tronco principale H G, si comunicherà ad essi l' acqua con eguale velocità, perchè essendo gli angoli H G I, H G K eguali, il seno di compimento G M pareggerà l' altro G E; e la quantità d' acqua derivata in essi sarà proporzionale alla loro capacità, o ampiezza.

Corollario II.

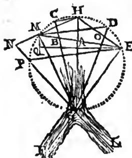
Ma essendo disugualmente inclinati, quell' alveo, che fa angolo più acuto col tronco ne parteciperà maggiore velocità dell' altro; perchè essendo minore l' angolo H G I dell' altro H G K, il compimento del primo G H M è maggiore di quello del secondo G H E, onde il seno G M, che misura la velocità derivata nell' alveo G L, sarà maggiore del seno G E, che misura la velocità dell' altro G F.

Corollario III.

Onde in pari larghezza de' due rami L G, F G il più inclinato al tronco principale, come L G, deriverà da esso più acqua, che il meno inclinato G F.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Diramandosi il fiume, la cui direzione, e velocità H G ne' canali G L, G F, a quali comunica le velocità G M, G E, come sopra determinate: e data la proporzione, con cui si divide l'acqua ne' detti canali, trovare le loro sezioni.



Circoscrivasi al quadrilatero H E G M, i cui angoli M, E sono retti, il cerchio E D M G, e condotta E M, segante il diametro H G in A, esprima la detta E M la quantità dell'acqua di tutto il tronco H G, e dividasi nella data ragione con cui si distribuisce l'acqua ne' rami G L, G F. Il punto della divisione, o cade nel punto A, o altrove, come in B. Nel primo caso adunque, essendo la quantità dell'acqua, che si deriva in G L, a quella che si deriva in G F, come M A ad A E, saranno le sezioni di essi rami G L, G F respettivamente, come H M ad H E, essendo la sezione del tronco H G, come la perpendicolare E Q tirata dal punto E sopra M Q parallela ad H G; imperocchè allora la quantità d'acqua, che si comunica a G L, a quella che si deriva in G F, essendo come M A ad A E, sarà ancora come il triangolo H G M al triangolo H G E, cioè in ragione composta delle velocità G M, G E, e delle altezze H M, H E; ma è ancora in ragione composta delle dette velocità, e delle sezioni; dunque H M ad H E è come la sezione del ramo G L a quella del ramo G F: essendo la quantità dell'acqua di tutto il tronco H G omologa alla somma di detti triangoli, che è in ragione composta della base H G, e della E Q somma delle loro altezze; onde esprimendo H G la velocità del tronco, esprimerà E Q le sezione di esso, in relazione all'altre sopra determinate.

Ma nel secondo caso, cadendo la divisione in B; si congiunga G B stesa alla circonferenza in C; e alla corda G H si tirino da punti M, E le parallele M D, E P, e si congiungano G D, G P, di cui quella concorra alla corda H E in O, e questa colla corda H M in N. Dico che la sezione del ramo G L a quella del ramo G F sarà, come H O ad H N, essendo quella del tronco, come E M. Perchè essendo D M parallela ad H C, sarà l'arco C M eguale all'arco D H, e l' angolo B G M eguale all' angolo O G H; ma ancora l'angolo B M G uguaglia l'angolo O H G, per essere nello stesso segmento, dunque sono simili i triangoli M G B, H G O, e sarà G M ad M B, come G H ad H O, onde il prodotto di G M in H O uguaglierà il prodotto di G H in M B. Similmente si proverà, che

che l' E G H uguagliando l'angolo C G P, apponendovi di comune l'angolo H G C, sarà l'angolo E G B uguale all'angolo H G N, e per essere gli angoli G E B, G H N nello stesso segmento, i triangoli G E B, G H N sono simili; onde G E ad E B sta come G H ad H N, e però il prodotto di G E in H N eguaglia il prodotto di G H in E B. Ma la quantità d'acqua dell'alveo G L a quella dell'alveo G F, sta come M B ad E B, essendo tutta l'acqua del tronco H G, come tutta la M E, ed in conseguenza le dette quantità sono, come i prodotti per ordine di H G in M B, di H G in E B, e di H G in E M; dunque sono ancora, come i prodotti di G M in H O, di G E in H N, e di G H in E M: e sono ancora, come i prodotti delle respettive velocità, e delle sezioni: dunque essendo G M, G E, G H come le velocità, saranno H O, H N, E M come le sezioni degli alvei G L, G F, H G. Il che ec.

Corollario I.

Se accade, che la stessa M E sia parallela ad H C allora coincidono i punti O, D col punto E, ed i punti P, N col punto M; onde la sezione di G L a quella di G F, è come H E ad H M, cioè reciprocamente come il seno dell'inclinazione del ramo G F, al seno dell'inclinazione del ramo G L verso il tronco H G, essendo la sezione di questo E M, come il seno dell'inclinazione tra loro d' ambidue i rami.



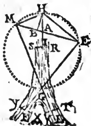
Corollario II.

Le larghezze degli alvei, supposto che almeno nello sbocco de' rami sieno d'eguale altezza col tronco, saranno come le sezioni sopra determinate.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Se la sezione del tronco G H a quella del tronco G L sta come M E ad E H, ancora all'altra del tronco G F starà come E M alla corda M H, e le sezioni de' rami suddetti saranno come le corde H E, H M.

Imperocchè essendo H G la velocità del tronco, quando E M esprime la sezione R S di esso, il rettangolo di H G in E M è omologo a tutta la quantità d' acqua della sua portata, ed essendo G M la velocità del fiume diramato G L, ed esprimendosi dalla H E la sua sezione T Y, il rettangolo di G M in H E è omologo alla quantità d'acqua derivata per l' alveo G L; ma pel teorema famoso di Tolomeo, il rettangolo di H G in E M uguaglia la somma de' rettangoli G M in H E, e di G E in H M, siccome tutta la quantità dell' acqua, che scorre pel tronco H G uguaglia la somma delle quantità d'acqua derivate ne' rami G L, G F,



G F; dunque il residuo rettangolo di G E in H M è omologo alla quantità d'acqua derivata per l'alveo G F; ed è il lato G E come la velocità di esso: dunque l'altro lato H M è come la sua sezione X Y; onde è manifesto ciò che si era proposto da dimostrare.

Corollario.

La quantità d'acqua trasmessa per l'alveo G L, a quella che si deriva per l'altro G F, fatto l'angolo M H B eguale all'angolo E H A, sarà come E B a B M: imperocchè il triangolo M H B è simile all'altro E H G, onde H M ad M B sta come G H ad G E, e però il rettangolo di H M in E G, omologo all'acqua derivata pel ramo G F, uguaglia il rettangolo di G H in M B. Similmente il rettangolo di G M in E H, omologo alla quantità d'acqua derivata pel canale G L, uguaglia il rettangolo di G H in E B; dunque la quantità d'acqua di questo ramo G L alla quantità dell'altro ramo G F, è come E B a B M, e a tutta l'acqua del tronco H G, come la stessa E B a tutta la E M.

CAPITOLO VI.

Varj metodi per misurare attualmente la velocità de' fiumi.

PROPOSIZIONE XL.

Misurare la velocità della superficie d'un fiume, per mezzo di un galleggiante.

Scelgasi un tratto il più lungo, ed il più diritto, e regolare, che avere si possa nel fiume, e misurando sulla ripa un intervallo di quella lunghezza, che parrà convenevole, come sarebbe di cento, o dugento pertiche, o un mezzo miglio ec. (quanto maggiore sarà l'intervallo, più esatta riuscirà l'osservazione, e più prossima al vero) si accordino due osservatori, uno che stando in una barchetta verso il mezzo del fiume, sia pronto ad un dato cenno [per esempio ad un fischio, al suono d'un campanello, al tiro d'una pistola, o mortaletto ec. secondo che sarà opportuno, attesa la lontananza, la quale se sarà piccola, basterà ancora alzare la mano con un fazoletto, o altro segno visibile] a porre il galleggiante nell'acqua nel filone del fiume, lasciandolo trasportare dalla corrente; l'altro stia sulla ripa nel termine inferiore della distanza già misurata, subito udito il segno, colla mostra d'un orologio in mano osservandone i minuti; o pure accostandola all'orecchio, per udire, e noverare i varj colpi, che intanto danno le palettine del fuso, o asta del tempo, urtando nei denti della ruota serpentina; ovvero numerando le vibrazioni d'un pendolo di nota lunghezza, che misuri i secondi, o i mezzi secondi; aspetti, che il galleggiante sia giunto dirimpetto a lui; che così po-

potrà conoscersi in quanto tempo il detto galleggiante traportato dall'acqua, ovvero l'acqua medesima, che lo porta, abbia passato il già determinato spazio; e conseguentemente si farà nota la velocità di esso fiume in superficie; e ripetendo l'esperimento in altri fiumi, o in altre parti del medesimo, si conoscerà la proporzione delle velocità, di cui sono affetti. Il che ec.

SCOLIO.

Si osservi, che nel tratto, per cui dee farsi l'esperienza, non vi sia cosa, che possa alterare il corso dell'acqua, o distornare il galleggiante dalla direzione del filone, o accelerarlo, o ritardarlo; per la qual cosa, quello che colla barchetta ha posto il galleggiante nell'acqua non si curi di seguitarlo colla barca, anzi aspetti a tornare a ripa, dopo che il medesimo galleggiante è gia lontano da quel sito. Sia ancora scelto un tempo di aria quieta, e tranquilla, acciocchè il vento a seconda, o contrario al corso dell'acqua, o comunque inclinato ad esso, non accelleri, non ritardi, o non distorni il detto galleggiante dalla sua direzione. Per la qual cosa ancora si abbia avvertenza, che la materia scelta per galleggiare non sia gran cosa più leggiera dell'acqua, sì perchè essendo quasi della medesima gravità specifica con essa, verrà mossa colla stessa velocità, come se fusse altrettanta mole d'acqua, quanto è il luogo, che vi occupa, e si ancora acciocchè non sopravvanzi molto la superficie di essa acqua, ed il vento non vi abbia su presa, nè l'aria possa contrastare gran cosa al movimento di essa, urtando nella parte, che sopravanza al livello dell'acqua: ma dovrebbe scieglierſi come una palla, che colla maggior parte di se fusse sommersa, purchè tanto ne avanzasse, che rimanesse visibile il suo arrivo agli osservatori.

Il P. Cabeo nel libro 1. delle meteore al testo 58. quest. 3. propone, in vece della palla suggerita dall'Abate Castelli, un'asta di legno assai lunga, con un peso D attaccatovi in fondo, per tenerla diritta, ed una corona di zucche, o vesciche B, C legatevi dal capo A, sicchè immersa nel fiume possa galleggiare la sola parte B A C, ed il resto rimanere sommerso. Ma dubito, che l'aria, incontrata dalla medesima porzione B A C posta a fior d'acqua, non alterasse troppo il suo movimento. Inoltre, ciò non servirebbe a misurare la velocità della superficie dell'acqua, nè di altra parte inferiore determinata di essa, perchè essendo tutta la lunghezza sommersa dell'asta investita da varie velocità competenti a diverse parti dell'acqua in varie distanze dalla sua superficie, ne nascerebbe in essa un moto misto, ed attemperato, che averebbe una velocità, di cui non saprebbamo dire, a quale altezza dell'acqua corrisponderebbe, se prima non ci fusse nota la proporzione della velocità di varie parti dell'acqua in diverse altezze: il che appunto è quello, che si voleva indagare. Si aggiunga la gran difficoltà di adattàre in tal maniera il peso D, che faccia stare ritta l'asta, e non inclinata; il che se non si ottiene, resta molto turbata la ragione della velocità, che si dovea determinare.



Il Barattieri Architetto dell'acque prop. 2. lib. 1. cap. 6. propone una tavola di legno sottile, e piana come sarebbe L O M, in cui parimente sta infilata un asta di legno R H, dalla banda di sotto nel termine H più



pesante, o renduta tale col peso D attaccatovi, tale, che basti a tenerla ritta, quando sarà immersa nell'acqua, in maniera, che il piano di essa tavola L M O N si adatti alla superficie del fiume, e si muova con essa. Certamente sarà più facile il mantenere diritta quest'asta, mercè della tavola, che dee stare a fior d'acqua, che non sarebbe rispetto a quella del P. Cabeo: ma non ardirei assicurare, che questo stiumento fusse lontano da ogni eccezione, anzi che non avesse tutte l'altre difficoltà considerate nell'altro già proposto di sopra.

PROPOSIZIONE XLI.

Esaminare, se in un fiume si muovano le inferiori parti dell'acqua con maggiore, o con minore velocità.

Si piglino due palle di cera L, M, e si connettano con un filo L M di quella lunghezza, che bisogna, secondo la distanza delle parti d'acqua, la cui velocità si desidera di paragonare; ma si faccia la palla M alquanto più grave, mescolandovi delle schegge di pietra, o di mattone, acciocchè essendo poste tutte e due dentro l'acqua, si mantenga inferiore all'altra L, e tirandola abbasso la faccia meglio infondere, di quello che farebbe, se fusse da se staccata, e così la tenga come a fior d'acqua. Se abbandonandosi le dette palle alla corrente del fiume, si vedrà l'inferiore rimanere addietro della superiore, sarà segno, che le parti inferiori dell'acqua sieno afferte di minore velocità, che le superiori, e al contrario, quando si vegga l'inferiore precedere la superiore, indicherà maggior velocità nelle parti dell'acqua profonda, che nella superficie. Il che, ec.

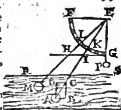


Monsù Mariotte nel suo Trattato del Movimento dell'acque prop. 2. disc. 3. dopo la regola quinta, attesta di aver sempre osservato, che la palla inferiore rimaneva addietro ne' canali di soli tre piedi di profondità, principalmente quando la palla disotto passava assai appresso al fondo, ove fussero dell'erbe, o sterpi, che doveano raffrenare la naturale velocità dell'acqua in quelle parti: ma allora che si mettevano le dette palle in qualche luogo, dove l'acqua incontrando qualche ostacolo si elevasse un poco, acquistando così un corso più rapido, come discendendo per un maggiore declivio [ciò che suole accadere sotto a ponti, ove l'acqua è obbligata a restringersi passando tra le pile di essi] la palla inferiore avanzava la superiore.

PROPOSIZIONE XLII.

Se da una funicella E A, penda un peso A, il quale s'immerga dentro l'acqua corrente, l'impeto di cui lo distorni dal perpendicolo E G, e lo disponga nel sito obliquo E A, sarà il momento della gravità del peso A alla forza dell'impeto impresso al medesimo dall'acqua, come il seno dell'inclinazione della funicella coll'orizzonte, al seno della sua declinazione dal perpendicolo.

Per-



Perchè intorno al diametro A C fatto il rettangolo A B C D, co' lati A B orizzontale, e B C perpendicolare, si averanno tre potenze in equilibrio, cioè la gravità del peso A, la quale tira per la direzione D A, ovvero C B, la forza dell' impeto, che l'acqua imprime alla palla, spingendola orizzontalmente, secondo la sua direzione C D, ovvero B A, e la forza di chi sostiene in E il filo colla palla annessa, perchè non cada; reggendola secondo la direzione A C E, direttamente opposta alla C A, che si compone dell' altre due forze secondo C B, e secondo C D. Adunque per le note regole della meccanica dimostrate da me nell' Epistola Geometrica del momento de' Gravi, e dal Signor Ceniga nelle note al num. 12 saranno i lati, ed il diametro di detto rettangolo proporzionali alle forze operanti secondo le loro direzioni: cioè la forza che sostiene in E sarà come A C, la forza della gravità del peso A, come C B, e la forza dell' impeto dell' acqua, cioè la velocità impressa al globo, come C D; ma C B è il seno dell' angolo C A B, per cui resta la funicella inclinata all' orizzonte e C D è il seno dell' angolo C A D, ovvero C E G, per cui declina la detta funicella dal perpendicolo: dunque ec. il che ec.

Corollario I.

Essendo C B a C D, ovvero B A, come il raggio costante E G alla G I tangente dell' angolo di declinazione dal perpendicolo G E I, è manifesto, essere la forza della gravità alla forza dell' impeto dell' acqua generalmente, come il raggio alla tangente della declinazione della funicella dal perpendicolo.

Corollario II.

Onde, se altrove si trovasse, che immersa la palla dentro l' acqua, declinasse la funicella ad un altr' angolo G E H: essendo allora la forza dell' impeto dell' acqua alla forza della gravità, come la tangente G H del sudetto angolo al raggio E G, si conclude, che le forze degli impeti, da diverse parti dell' acqua impresse al medesimo globo, sono come le tangenti degli angoli, per cui declina nell' uno, e nell' altro caso la funicella dal sito perpendicolare.

P R O P O S I Z I O N E XLIII.

Misurare la velocità dell' acqua per mezzo d' un quadrante.

Dal centro del quadrante G K F E pendano due fili, uno E P, che dee rimanere in aria colla palla di piombo attaccata P, per denotare il perpendicolo, l'altro più lungo E A colla palla A da infondersi nell' acqua, a quella profondità, di cui si desidera sapere, quanto impeto vi si eserciti, e con quanta velocità il fiume vi scorra. Si noti adunque nel lembo del quadrante, assettato prima in modo, che il lato E G convenga col perpendi-

colo B P, e conseguenremente il lato E F sia orizzontale, si noti, dissi, il grado G K, misura dell'angolo, per cui declina la funicella E A dal perpendicolo, e la tangente di detto angolo misurerà la velocità dell' acqua, nel luogo B A, dove stava immersa la palla; siccome, scorciando, o tirando su dal centro E il predetto filo, per fare il saggio della velocità in minore profondità col filo E M, si averà nel lembo del suddetto quadrante il numero de' gradi G L corrispondenti all' angolo della declinazione G E M, la di cui tangente ci esprimerà la velocità dell' acqua nel sito M, e colle tavole de' seni, e tangenti, si potrà venire in cognizione della proporzione dell' una, e dell'altra velocità, paragonandole alle tangenti ivi espresse de' gradi G K, G L, cioè G I, G H tassate in numeri. Il che ec.

SCOLIO.

Questo modo è del Guglielmini nella misura dell' acque correnti lib. 2. prop. 9. approvato ancora dall' Ermanno nella sua Foronomia alla prop. 41. del libro 2. se non che questi vuole primieramente, che la direzione C D, ovvero B A dell' acqua non si pigli per orizzontale, ma per parallela al fondo, che può essere inclinato all' orizzonte, e quasi sempre si trova tale; ed in secondo luogo, vuole che le velocità non sieno come le impressioni dell' acqua, ma in suddupplicata ragione di esse, onde le linee omologhe alle forze esercitate dall' acqua sopra la palla, stima che sieno come i quadrati delle velocità. Quanto al primo, discorrendosi in questo primo libro principalmente di fiumi orizzontali, e non sensibilmente inclinati, non ha luogo quella avvertenza, che per altro sarebbe necessaria, dove fusse notabile la pendenza dell' alveo. Oltre di che pochi fiumi si troveranno, la cui superficie, e fondo regolato si distingua sensibilmente dal piano orizzontale: perchè quando ancora avessero 3. piedi di caduta per miglio, non giugnerebbero ad inchinarsi 2. minuti sotto l' orizzonte: e però le linee, cui sarebbero proporzionali le impressioni dell' acqua, prese sulla direzione di tale pendenza, non si potrebbero in pratica distinguere dalle tangenti degli angoli della declinazione del pendolo dal perpendicolo, determinate come sopra. Quanto al secondo, mi rimetto a quanto ho avvertito nello Scolio I. della prop. 26. di questo libro, senza che faccia bisogno di aggiugnervi altro.

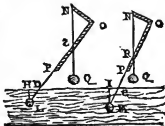
PROPOSIZIONE XLIV.

Con una squadra, ed un pendolo, col perpendicolo, misurare le velocità di varie parti dell' acqua.

Ad una squadra N O P sia connesso, pendente dal termine superiore N il perpendicolo N Q, ed al termine inferiore P il pendolo P M, ovvero P L, il quale s' infonda dentro l' acqua, fino che arrivi al luogo, di cui si vuole esaminare la velocità; che sia primieramente il luogo M, e si disponga nel sito obliquo P M, tagliando la superficie dell' acqua in C. Si giri la squadra, fino a tanto, che la gamba O P sia per diritto al filo P M, ed allora il perpendicolo N Q seghi la stessa gamba O P in R. Similmente volendo esaminare la velocità dell' acqua nel sito L, si disponga la gamba della squadra O P in dirittura della direzione P L ivi presa dal pendolo, segante il livello dell' acqua in D, ed allora si noti il punto S, dove il perpen-

di-

dicolo N Q sega la detta gamba O P. Dico, che come O S ad O R, così reciprocamente starà la velocità in M alla velocità in L. Imperocchè condotte le perpendicolari M I, L H alla superficie dell'acqua, il triangolo C M I sarà simile al triangolo R N O; ed il triangolo D L H simile al triangolo N O S; ma per la prop. 42. la forza dell' impeto impresso dall' acqua alla palla M sta alla forza della gravità di essa, come C I ad I M, cioè come O N ad O R; e la forza della gravità della palla alla forza dell'impeto impresso in essa dall'acqua in L, sta come L H ad H D, ovvero O S ad O N; dunque per l' egualità perturbata, la forza dell'impeto impresso dall'acqua alla palla in M, a quella dell'impeto impresso alla medesima palla in L sta, come O S ad O R; e però le velocità delle parti uguali dell' acqua in M, ed L, sono reciprocamente come le parti O S, O R della gamba inferiore della squadra, intercette fra l'angolo retto O, ed il perpendicolo N Q. Il che ec.



Corollario.

Ne segue, che le velocità dell'acqua in M, ed L siano ancora reciprocamente, come le tangenti degli angoli d' inclinazione del pendolo P L, ovvero P M coll'orizzonte C H; perchè O S è la tangente dell' angolo O N S, ed O R la tangente dell' angolo O N R, presa la gamba O N per raggio; ma l'angolo O N S eguaglia l'angolo L D H, e l' angolo O N R pareggia l'angolo M C I, che sono l'inclinazioni del perpendicolo coll'orizzonte: dunque le velocità in M, ed L sono reciprocamente come la tangente dell'inclinazione del pendolo P L, alla tangente dell' inclinazione del pendolo P M.

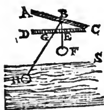
SCOLIO.

Questo modo è proposto dal Sig. Giovanni Ceva nel suo opuscolo de' fiumi alla prop. 4 il quale nella prop. 6. cerca di applicarlo ancora in caso che non si voglia prendere l'acqua de' fiumi nella sua superficie per orizzontale [come si è fatto di sopra, senza pericolo di sensibile errore] ma come inclinata, secondo il suo declive: ma la maniera di tale correzione parendomi troppo composta, ne darò una più semplice, e spedita, dopo di avere avvisato, potersi perfezionare questo strumento, e renderne l' uso più facile; perchè se sarà divisa la gamba più lunga O P della squadra in una gran moltitudine di parti minute, dal numero di esse interposte fra il centro O, ed il concorso del perpendicolo, facendone una frazione, in cui l'unità si denomini dal numero di esse parti, si averà una espressione della velocità nel luogo esaminato, essendo le frazioni, che hanno lo stesso numeratore, reciproche a' loro denominatori, che quì sono le parti intercette fra il centro della squadra, ed il perpendicolo, alle quali si è veduta essere reciproca la detta velocità; e se per numeratore gli si daranno le parti,

ti, ch'entrano nella costante lunghezza del braccio O N, omologo alla gravità, si averà la relazione di essa alla forza, che fa l'acqua nel sito esaminato. Per esempio sia divisa O N in cento parti, e la O P in mille. Si trovi, fatto l'esperimento ne' luoghi M, L, essere l' intercetta O R parti 350., e l' intercetta O S parti 175. sarà dunque la velocità in M a quella in L, come un trecencinquantesimo ad una parte centesima settuagesima quinta; o pure si concluderà essere quella cento parti trecencinquantesime della gravità, e questa cento parti centesime settuagesime quinte, cioè ivi due settimi, e quì quattro settimi della forza della gravità.

Chi volesse mettere in conto la declività della superficie dell'acqua, fin ora presa come orizzontale, potrebbe attaccare il pendolo N Q alquanto più alto, sicchè la retta N O in vece di far angolo retto colla O P, fusse tanto soprasquadra, come suol dirsi, quanto è l'angolo, per cui la superficie dell'acqua s'inclina sopra l' orizzonte, onde l' angolo N O P fusse ottuso, ed eguale all'angolo C I M; ovvero D H L fatto dalla direzione della gravità, e dal livello superiore C H della cadente dell' acqua, che si supporrebbe altresì in tal caso essere ottuso, perchè così rimarrebbe la similitudine de' triangoli C I M, R O N, ovvero delli due D L H, S N O; e collo stesso raziocinio di sopra s'inferirebbe, essere la forza dell'acqua in M alla forza in L, come reciprocamente O S ad O R. Sicchè basta nella larghezza della gamba O N descrivere col centro O, e raggio O N un archetto di un grado, o due divisi ne' suoi minuti, ed in esso alzare il punto N, dove si attacca il pendolo N Q, secondo il bisogno, cioè a tanti minuti del detto archetto, quanti ne apporta la declinazione della superficie dell'acqua dall' orizzonte, operando poi come sopra.

PROPOSIZIONE XLV.



Misurare con un compasso la velocità di varie parti dell'acqua.

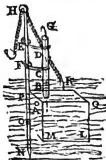
Nelle visite fatte del Po, e de' suoi influenti, da Pavia fino agli sbocchi nel mare, alle quali intervenni come Mattematico di Sua Santità Nostro Signore Papa Clemente XI di gloriosa memoria, ho veduto adoperarsi dal Signor Dottore Bernardino Zendrini, Mattematico del Serenissimo di Modena, indi della Serenissima Republica di Venezia, per misurare le velocità dell' acqua un certo strumento fatto a modo di un compasso di proporzione, quale sarebbe A C D, che si apriva, con tenere la gamba inferiore C D parallela, per quanto potevasi, al corso dell'acqua, cioè alla superficie del fiume, alzando tanto l'altra gamba superiore C A, che il perpendicolo B F attaccato ad un punto intermedio B, battesse nell'altra gamba in un determinato punto E, dal quale contando verso l' estremità D vi erano segnate le divisioni, che corrispondono alle tangenti di varj gradi, o sia angoli E B G, che facea col perpendicolo il pendolo B H immerso dentro l'acqua. Misuravasi esattamente, sì la lunghezza del filo di seta B H, che reggeva la palla H di legno scavato, e ripieno dentro di piombo, e sì l'altezza del centro B sopra la superficie S R dell' acqua, per sapere in quale profondità fusse la palla H, quando stendeva il filo nella direzione B H, che facea col perpendicolo B F l'angolo E B G, indicato da i gradi notati nella tangente E G: da cui credo, che intendesse il suddetto

Si-

Signore Zendrini d'inferire la proporzione delle velocità, secondo i medesimi principj già spiegati nelle due proposizioni precedenti; sebbene, per varie eccezioni, e ragioni oppostegli dalle parti, fu stimato bene di non farne più precisa applicazione, e non servirsene a conseguenza veruna, che richiedesse più esatto, e delicato squittinio.

PROPOSIZIONE XLVI.

Per mezzo d'una fiasca idrometrica ricercare le proporzioni della velocità in varie parti d'un fiume.



Nell'ultima parte delle suddette visite fu proposta quest' anno 1721. da' Signori Bolognesi la presente macchina A L M è un vaso parallelepipedo di latta assai più lungo, che largo, ben chiuso da per tutto, eccetto che per un sottilissimo foro A, aperto verso la sommità della parte più stretta. poteva entrarvi dentro l' acqua, allora che aperta fusse una cataratta, che lo chiudea per di dentro. Si apriva poi la detta cateratta per mezzo d'una susta congegnatavi, la quale poteva alzarsi con un filo di ferro, che per un sottilissimo tubo B G attaccato al coperchio di esso vaso, passava al disopra, ed arrivava sopra la superficie dell' acqua; anzi poteva ad arbitrio, e secondo richiedesse il bisogno d' immergere più profondamente la macchina, vie più allungarsi, aggiungendo altri canaletti simili sopra il primo B G, l'uno inserto nell'altro, e bene stuccato, perchè non vi entrasse acqua nell' immergersi entro l'alveo del fiume. Lo stesso tubo B G dava esito all'aria quando si voleva introdurne l'acqua in detto vaso. H N è un palo di ferro, che si pianta nel fondo del fiume, per tenere ferma la macchina, e per mezzo della fune K H I attaccata alla fiasca in K, la quale passa per un anello, o puleggia posta in cima del ferro H si alza, e si abbassa la detta fiasca, che ancora in O, P, F, E ed altri simili punti ha varj occhielli inserti in esso palo di ferro, per mezzo de' quali può scorrere sù, e giù, rimanendo sempre diritta, ed attaccata al detto palo. Nel tubo B G vi sono alcuni cerchietti a luogo, a luogo, i quali lo dividono in piedi, e mezzi piedi, ed once, perchè mandando in giù la macchina finattanto, che uno di detti segni notati nel tubo, resti a fior d'acqua, si sappia, a quale profondità resti immerso il foro A, che dee ricevere l' acqua.

Volendo adunque esaminare, che proporzione di velocità abbia l'acqua in varie altezze, per esempio a due piedi, ed à cinque piedi di profondità; stando gli osservatori sopra una barca, la quale si tenga vicino al luogo, dove si vuole fare l' esperimento, si mandi giù prima il palo di ferro H N, e si ficchi nel fondo, che servirà ancora a tenere più ferma la barca; la quale vi si appoggia colla sua sponda: indi si cali colla fune H K la fiasca Q M B sotto acqua, notando ne' segni del tubo B G, quando il foro A si trova sotto la superficie dell'acqua due piedi, ed allora essendo uno sulla ripa ad osservare le vibrazioni d'un pendolo di nota lunghezza, si dia segno a questi, che cominci a contare le vibrazioni, ed a quello che maneggia la macchina, che nel medesimo tempo alzi il ferretto G, e con esso

eflo la molla, che apre la cateratta, e dà l'ingreflo all'acqua. In capo ad un determinato numero di vibrazioni, per esempio di feflanta, fi dia fegno a chi maneggia la macchina, che lafci andare il fermetto G, e fubito la molla chiude la cateratta, onde non entra più acqua nella fiafca. Colla fune H K fi alzi dunque la fiafca fuori della fuperficie dell' acqua, e girandola fulla fponda della barca fi giri un galletto pofto nel fondo della fiafca in L, con che fi farà ufcire per un cannellino ivi difpofto l' acqua chiufa in effa fiafca, raccogliendola in un vafo, per pefarla. Di nuovo chiufo il detto galletto s' immerga la machina dentro l'acqua, finchè da'fegni del tubo B G fi conofca, eflere il foro A fotto la fuperficie dell'acqua in profondità di piedi cinque, e di nuovo fatto cenno, torni l'offervatore del tempo a contare altrettante vibrazioni, e chi maneggia la macchina, alzi nello fteflo iftante il fermetto G, aprendo la cateratta, e lafciando entrare l' acqua nella fiafca, finito il medefimo numero di vibrazioni, fi dia cenno, come prima, che lafciando andare la molla, fi chiuda il foro A, e fi eftragga la fiafca, e da effa fi cavi l'acqua, e fi pefi. Dico che la proporzione dei pefi delle due quantità d'acqua, raccolte, come fopra, ci darà la proporzione della velocità dell'acqua in profondità di due piedi alla velocità, che ha nella profondità di piedi cinque; e così fecondo le varie altezze fi troverà qual grado di velocità loro corrifponda.

Imperocchè paflando per lo fteflo foro A in tempo eguale l' acqua del primo, e del fecondo efperimento, la fua proporzione farà quella della fua velocità, per la prop. 4. ma la proporzione della mole dell'acque è quella del loro pefo; dunque ec.

SCOLIO I.

Eflendofi fatte varie offervazioni con quefto ftrumento, sì nell' acqua ftagnante, come nella corrente, in diverfe profondità, fempre fi è trovato, che a un dipreflo le velocità fono in fudduplicata ragione dell'altezze; e ciò che pare un paradoflo, la fuperficie de' fiumi, e d' altri canali d' acqua corrente, non apparifce affetta di velocità alcuna, perchè tenuto il foro A a fiore d'acqua, per moltiffimo tempo, non ne entrava nella fiafca nè pure una goccia: quafi che la fuperficie dell' acqua, che pur fi vede muoverfi tanto notabilmente, non fufle fe non trafportata dall' acqua inferiore, e quefta fermandofi, per la oppofizione delle pareti del vafo A L, ancora quella rimanefle immobile, o fufle di quà, e di là divertita dall' acqua ftefla inferiore, che di quà, e di là dal detto vafo fcorre, fenza potere imboccare nel foro A, che pure ftava aperto, e difpofto a riceverla. Per quefte, ed altre circoftanze, ficcome molti diffidarono della giuftezza di quefta macchina in ordine alla mifura delle velocità dell' acque correnti, pretendendo, che folamente fervir poteffe a confermare la proporzione degli impeti, co'quali l'acqua ftagnante efce dall'aperture pofte in diverfa diftanza dal fuo livello fuperiore; così nè meno io ho voluto fare fondamento fopra tali fperienze da me replicatamente vedute, ed attentamente offervate, in ordine allo ftabilire la teoria della proporzione della velocità in varie altezze dell'acqua corrente; ma ho ftimato meglio in quefto primo libro di prefcinderne, e ftare fopra i generali principj di quefta materia, fpingendoli fin dove fi poteva, fenza attaccarfi ad alcuna particolare ipotefi, come farò per fare poi nel libro feguente, attenendomi a quella, che comunemente è giudicata per più verifimile.

SCO-

SCOLIO II.

Fu pensato ancora ad un altro artifizio, per inferire la proporzione delle velocità in diverse parti dell' acqua. Si volea nella cassetta A L Q simile alla passata, e da maneggiarsi con simigliante maniera, nell' applicarla allo sperimento, al foro A porre un cannellino, che obbligasse l' acqua nell'entrarvi dentro, a farvi un zampillo parabolico A X; e da una assicella F T N inserita dentro pel coperchio di sopra, che potesse levarsi, e riporsi dirimpetto al detto foro verticalmente sospesa in una proporzionata distanza, si pretendeva di poter determinare l'impeto dell' acqua, secondo che da esso zampillo fusse percossa in un punto X più, o meno distante dalla orizzontale A V tirata dal foro. Imperocchè bagnandosi l' assicella dall'acqua inrruta dal cannello A nel punto X, era certo che l' acqua ivi tanto impeto, o velocità esercitasse, che potesse scorrere lo spazio A V secondo la sua direzione nel tempo, che per la forza della gravità era tirata abbasso per l'altezza V X; onde se fatto l'esperimento, si trovasse bagnata l' assicella in un punto superiore, o inferiore ad X, era certo che la velocità dell'acqua ivi farebbegli passare lo stesso spazio A V in minore, o maggior tempo, quale è quello, in cui la gravità dell'acqua le farebbe scendere un'altezza minore, o maggiore della V X; sicchè essendo le velocità reciproche de' tempi, ne' quali si scorre il medesimo spazio, ed essendo i tempi in sudduplicata ragione dell'altezze scorse per la forza della gravità, ne seguiva, che le velocità ricercate erano reciprocamente in ragione sudduplicata delle altezze V X interposte fra l' orizzontale V A, ed il luogo ove batterebbe il zampillo parabolico dell'acqua A X; ma si considerarono tante difficultà in potere, senza equivoco, distinguere il preciso punto X, ove batteva il detto zampillo, che ne meno fu tentato di mettere in pratica questo artifizio: ma io non ho voluto quì dissimularlo, potendo essere, che altri meglio speculandovi sopra lo perfezionasse, e lo depurasse da quelle eccezioni, a cui nella prima idea fu giudicato essere sottoposto.

LI.



LIBRO II.

Del moto, velocità, e figura de' fluidi nell' uscire da' vasi, e del corso loro per canali inclinati, e della pressione del fondo, e delle ripe, o altri ostacoli opposti alla direzione di essi.



SUPPOSIZIONI.



BEnchè la maggior parte delle proprietà finora considerate negli alvei orizzontali de' fiumi, senza dubbio convengano ancora a' canali di fondo notabilmente inclinato all' orizzonte, e vi cagionino simili effetti: tuttavolta l' aumento della velocità, che accade all' acqua in conseguenza della varia inclinazione de' piani, sopra di cui è obbligata a scorrere, vi cagiona altri effetti degni di una particolare considerazione. Suppongasi dunque.

I Che l' acqua è grave, e colla sua gravità, non meno degli altri corpi più sodi, fa uno sforzo continuo d' avvicinarsi al comun' centro de' gravi, che è lo stesso col centro del globo terracqueo: e però, se non è impedita, scorre all' ingiù.

II. Che l' acqua discendendo accelera il suo moto secondo le leggi dimostrate dal Galileo, e ricevute oramai di comune consenso da tutti i Filoso-

losofi, e Mattematici di prima riga, e confermate dalla fperienzà: cioè in maniera che gli fpazi fcorfi dal principio del moto fieno in duplicara ragione de' tempi; o pure, che le velocità medefime nel mobile, che difcende, fieno in fubduplicata ragione di quella dell' altezze, dalle quali è caduto.

III. Che vi paffa quefto divario tra i corpi fluidi, ed i corpi duri, e mafficci, che quefti, avendo tutte le fue parti collegate infieme, fi unifcono a premere il piano orizzontale, o inclinato, fopra di cui fi appoggiano non premendo altrimenti i piani verticali, che li toccano: ma quelli avendo le parti fciolte, efercitano la loro preffione verfo qualunque parte, onde premono ancora i piani verticali, da cui fono contenuti, di maniera che giungono ancora a romperli, e penetrarli, quando non fieno di proporzionata refiftenza dotati.

Ciò viene bensì negato da Famiano Michelini, il quale crede, che ficcome un prifma di diaccio conrenuto in un vafo preme folamente il fondo, e non le pareti laterali, che lo toccano, così debba ancora l' acqua efercitare tutta la fua preffione contro il fondo de' fiumi, e contro le ripe, e gli argini fatti a fcarpa, perchè vi paffa fopra, come fu tanti piani inclinati, ma non contro le fponde erette perpendicolarmente all' orizzonte. La fperienza però è manifefta in contrario, perchè forando le pareti d' un vafo pieno d' acqua, fubito quefta efce, il che dimoftra, che già ftava ivi premendo la detta parete, la quale colla fua refiftenza ne raffrenava, e fofteneva l' impeto, onde levata la detta refiftenza, fubito prevale la preffione dell' acqua, ed efce a fuo talento, con maggiore, o minore velocità, fecondo il carico dell' altezza, che ha fopra di fe. Quindi è noto, che non fi può d' ogni minima groffezza far le pareti ad una vafca, o ad altro vafo, che contenga un fluido, ma fi richiede in effa una determinata robuftezza, perchè non cadano, il che è pur fegno apertiffimo della preffione efercitata dall' acqua non folamenre contro il fondo, o contro le ripe inclinate, ma ancora contro le fponde verticali d' un vafo, dentro cui debba contenerfi.

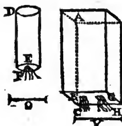
CAPITOLO I.

Della proporzione, con cui l' acqua contenuta ne' vafi efce dalle loro aperture.

PROPOSIZIONE I.

SE faranno due tubi, A B, D E, i quali fi mantengano pieni della fteffa fpecie di fluido, come farebbe l' acqua, le velocità, colle quali ufcirà da effi il fluido attraverfo due fori B, E aperti nel fondo di ciafcun tubo, faranno in fuddupplicata ragione di quella dell' altezze A B, D E.

Si



Si consideri, che la forza, la quale spigne l'acqua fuori del tubo A B è il cilindro, o prisma d'acqua, la cui base è l'apertura B, e l'altezza la B A; e che similmente la forza, che caccia l'acqua dal tubo D E, è un cilindro o prisma di acqua, la cui base è l'apertura E, e l'altezza la E D; imperocchè il resto dell' acqua circonfusa viene sostenuto dalla solidità del fondo, e però non spinge l' acqua sovrapposta all'aperture B, ed E, nè la sforza a discendere; e se lateralmente la strigne, ciò non ha effetto alcuno, essendo quell' azione corrisposta con altrettanto sforzo laterale della stessa colonna A B, ovvero D E, la quale tende egualmente a dilatarsi, come farebbe se vi fusse minore azione, che non vi è nell'acqua circonfusa. (Per non dir nulla, che potrebbe supporsi il foro eguale alla base medesima de' tubi, come se a questi in un tratto fusse levato il fondo, ed allora non potrebbe darsi colpa all'acqua circomposta, quasi che coll'azione sua turbasse, o in parte oscurasse il nostro raziocinio) dunque le forze, che spingono le dette acque all' uscita, sono in ragione composta di quella dell' aperture B, E, e di quella dell'altezze A B, D E; ma gli effetti essendo sempre proporzionali alle loro cagioni, ancora le quantità del moto, o le impressioni, cioè i momenti dell'acqua B C spinta colla sua velocità V, e dell'acqua E F spinta colla velocità O, debbono essere come le dette forze; dunque essendo i detti momenti, per la prop. 25. del libro I. in ragione composta delle sezioni, o delle aperture, per cui passa l' acqua, cioè di B ad E, e del quadrato della velocità V al quadrato della velocità O, avremo che la ragione composta di quella de' fori B, E, e dell' altezze A B, D E uguaglia la composta di quella delle medesime aperture B, E, e di quella de' quadrati delle velocità V, O, e però detratta di comune la ragione delle aperture B, E rimarrà la ragione dell'altezze suddette eguale a quella de' quadrati delle velocità, cioè in ragione duplicata di esse, o diciamo la ragione delle velocità V, O, resta eguale alla sudduplicata dell'altezze A B, D E. Il che ec.

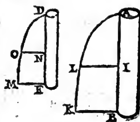
Corollario I.

Ancora se le aperture fussero fatte verticalmente nelle pareti del tubo vicino al fondo, e non nel fondo medesimo, seguirebbe lo stesso; imperocchè premendo i fluidi per ogni verso, dovunque hanno l' adito aperto all'uscita, esercitano la forza; e però sempre ne segue, che la forza, da cui è spinta l'acqua all' uscita, è un cilindro, o prisma d' acqua, che abbia per base l'apertura del foro, da cui l'acqua ha l'esito, e per altezza, la medesima altezza dell'acqua, dal centro dell'apertura fino al suo livello superiore.

Corollario II.

Se all'altezze A B, D E, come assi, si faranno due parabole A L K, D O M, descritte collo stesso parametro, o lato retto, le ordinate B K, I L

I L della prima, e l'ordinate E M, N O della seconda, esprimeranno le velocità, colle quali uscirebbe l'acqua dal primo tubo, se fusse aperto in B, ed in I, e colle quali uscirebbe dal secondo, se altresì fusse aperto in E, ed in N, supposto che l'acqua si mantenesse nell'uno, e nell'altro al supremo livello A, ovvero D; imperocchè dette ordinate dalla parabola sono appunto in suddupplicata ragione dell'altezze, come si è mostrato essere le velocità dell'acqua, che esce dalle dette corrispondenti aperture.



Corollario III.

Ancora le quantità dell'acqua, che esce da eguali aperture in egual tempo, essendo in ragione delle velocità, saranno in suddupplicata ragione dell' altezze, come con innumerabili sperienze hanno mostrato il Torricelli, il Maggiotti, il Mariotte, il Guglielmini, e noi ancora provato abbiamo colla fiasca idrometrica descritta di sopra nel libro 1. prop. 46.

Corollario IV.

E conseguentemente ancora la quantità d' acqua ch' in un dato tempo esce dal tubo A B per l'apertura B, a quella che uscirebbe da una eguale apertura I sotto l'altezza A I, sta come l'ordinata B K all' ordinata I L della stessa parabola A L K.

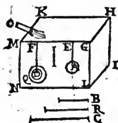
Corollario V.

Ed essendo le aperture disuguali, saranno le quantità d' acqua in egual tempo scaricate da esse, in ragione composta di quella di esse aperture, e della suddupplicata dell'altezze suddette, o delle ordinate corrispondenti nella parabola.

PROPOSIZIONE II.

Data la quantità d'acqua, che esce in un dato tempo dal lume A, il quale ha sopra di se l'altezza d'acqua E A, aprire un altro lume nell'altezza data F D, per cui sgorghi altrettant' acqua nel medesimo tempo, quanta ne veniva dal lume A.

Si trovi tra le altezze date E A, F D la media proporzionale P, e come P ad E A, così stia la superficie del lume A alla superficie d' un altro lume D. Questo manderà altrettant' acqua in egual tempo; imperocchè la velocità in A alla velocità in D, avendo ragione suddupplicata dell' altezze E A, F D; sarà quella a questa, come A E alla media proporzionale P, cioè per costruzione, come la superficie del lume D a quella



dell' A: pertanto, reciprocandosi le sezioni colle velocità, si tramanderà dall' uno, e dall' altro lume eguale quantità d' acqua. Il che ec.

PROPOSIZIONE III.

Date le stesse cose, aprire nell' altezza F D tal lume Q, che tramandi una quantità d' acqua, la quale stia alla somministrata dal lume A nella data ragione di C a B.

Facciasi il lume D (già determinato come sopra) al lume Q come B a C; dunque l' acqua ch' esce dal lume D a quella, ch' esce dal lume Q in pari altezza, o distanza D F dal centro del lume al livello superiore dell' acqua, sta come il lume al lume, cioè, come B a C; ma quella ch' esce dal lume D eguaglia quella, che sgorgava dal lume A, dunque l' acqua trasmessa dal lume A sta a quella, che tramanda il lume Q, come B a C, cioè nella data ragione. Il che ec.

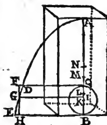
SCOLIO.

Due difficoltà quì si affacciano, per le quali non sembra, che possa essere accurata la soluzione di questi Problemi. L' una si è, per non essere la medesima velocità in tutte le parti del diametro verticale d' una apertura, onde rimane incerto qual sia il centro, per dir così, dove il lume ha la sua mezzana velocità, dal quale centro alla sommità dell' acqua si dee determinare l' altezza vera, proporzionale a' quadrati delle medie velocità. L' altra si è, per qualche resistenza, che incontra l' acqua nel soffregamento col contorno dell' aperture, per cui passa. La prima difficoltà non è quasi sensibile, dove i lumi sono assai piccioli, non essendo allora gran divario di velocità tra le parti dell' acqua corrispondenti alle dette aperture, per non essere nè meno gran cosa differente l' altezza dell' acqua, che vi è sopra il lembo inferiore da quella che sta sopra il lembo superiore, onde preso il centro di grandezza di questi lumi, non vi sarà gran divario dal centro suddetto della media velocità. La seconda al contrario non è sensibile ne' lumi di maggiore diametro, ma bensì, in quelli più minuti; per la qual cosa, si cercherà di rimediare ad ambedue le suddette difficultà nelle due seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE IV.

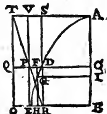
Trovare la mezzana velocità dell' acqua, che passa per la sezione del lume B C.

Si descriva sull' asse A B, che è l' altezza dell' acqua, la parabola A B E, saranno le ordinate di essa, come le velocità corrispondenti all' altezze, cui sono applicate, e però il trapezio parabolico C B E D sarà la scala delle velocità, per l' altezza del lume B C; e quadrando questo spazio parabolico, riducendolo in un rettangolo C B H F eguale ad esso; ed applicato all' altezza medesima B C, la sua larghezza B H sarà, secondo la diffin. 6. del libro 1. la media velocità, che si cerca, e dove il lato F H sega



sega in G la curva parabolica D E, ordinando G I, sarà determinato nell'altezza medesima B C il punto I, che è il centro della velocità: e la vera altezza A I, da cui essa velocità media I G dipende.

Per trovare geometricamente il detto punto I, ovvero G, si ponga tra le due B A, C A media geometrica A L, e come A L a C A, così stia C A ad M A; saranno dunque continuamente proporzionali B A, L A, C A, M A, ora come B C a B M; così stiano due terzi di B E alla B H, e condotta H F segante il contorno della parabola in G, si ordini G I, che questa sarà la ricercata media velocità. Imperocchè avendo le parabole sempre una stessa ragione a' rettangoli circoscritti sarà B A E a C A D in ragione composta dell'altezze B A, C A, e delle basi B E, C D; ma quella di B E a C D è la suddupplicata di B A a C A, cioè quello di B A ad A L, ovvero di A C ad A M; dunque la prima parabola alla seconda sta come B A ad A M; onde uguagliando la prima parabola due terzi di B A in B E, la seconda pareggerà due terzi di M A nella stessa B E: e però la differenza loro, cioè il trapezio parabolico C D E B uguaglierà la differenza de i detti rettangoli, cioè il prodotto di B M in due terzi di B E, ovvero il rettangolo di B H in B C, essendo B C a B M, come due terzi di B E a B H; e però il rettangolo C B H F è eguale al detto trapezio parabolico. Il che ec.

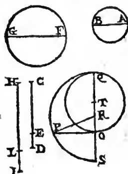


O pure più speditamente tirate per D, ed E le rette R D S, E P V parallele all' asse A B, che convengono colla tangente della cima A T in S, V, stendasi l' ordinata C D in P, e congiunta R P convenga colla suddetta tangente in T, e compiuto il rettangolo B A T O si ponga B H eguale a due terzi della B O, ovvero della A T; dico, che tirata H G F parallela all'asse, la quale concorre colla parabola in G, e ordinata G I, sarà I il centro della velocità, e la stessa G I sarà la media ricercata. Imperocchè essendo la parabola A E B due terzi del rettangolo A B E V, e la parte A C D parimente due terzi del rettangolo A C D S, sarà il trapezio parabolico C D E B due terzi dello spazio C B E V S D; ma essendo S D P V eguale ad E P Q O per essere questi supplementi del parallelogrammo S R O T, giuntovi di comune C B E P, sarà il rettangolo C B O Q eguale al suddetto gnomone C B E V S D; dunque il trapezio parabolico C D E B eguaglia due terzi del rettangolo C B O Q, e però eguaglia il rettangolo C B H F, che ha la base B H eguale a due terzi della B O. Il che ec.

PROPOSIZIONE V.

Data la sezione del lume A B, il quale per se stesso dovrebbe dare la quantità d' acqua C D, ma per ragione della resistenza nel soffregamento dell' acqua intorno a' margini della detta sezione, dia la sola quantità d' acqua C E, si cerca quant'

acqua dovrà uscire per una sezione simile d' un altro lume di un dato diametro F G, in pari altezza d' acqua.



Si faccia, come il quadrato A B al quadrato F G, così C D ad H I, e come il diametro A B al diametro F G, così D E ad I L. Dico che H L sarà la quantità dell' acqua, che di fatto si scaricherà dal dato lume F G. Imperocchè, senza il soffregamento de' margini, le quantità d' acqua, che uscirebbero da' lumi A B, F G di figura simile, sarebbero come i quadrati de' loro diametri, essendo proporzionali alle capacità di dette sezioni, e però sarebbero, come C D ad H I; onde se C D esprimeva la quantità d' acqua, che per se stesso, senza soffregamento, darebbe il lume A B, ancora H I sarebbe la quantità d' acqua, che senza tale resistenza verrebbe dall' altro lume F G; ma le resistenze nate dall' urto ne i margini di tali lumi, sono come gli orli, o contorni di essi, cioè proporzionali a' diametri, cioè come D E ad I L; dunque se D E è quello, che toglie all' acqua il soffregamento del margine A B, sarà I L ciò, che si diminuisce alla quantità dell' acqua, che dovea passare pel lume F G, mercè del soffregamento dell' orlo suo; e però la vera quantità d' acqua, che passa per esso, è la rimanente H L, sopra determinata. Il che ec.

Corollario.

Quindi è manifesto il metodo per determinare la quantità d' acqua raffrenata dal soffregamento dell' orlo d' una data apertura, dipendente però da qualche sperienza già conosciuta. Per esempio se l' apertura, che abbia il diametro d' un quattrino del nostro braccio, sotto una determinata altezza d' acqua di cinque soldi, dà in un minuto primo libbre 9. e mezzo d' acqua, in vece di libbre dieci, che si potevano aspettare, se non vi fusse stato il soffregamento, di maniera che la quantità d' acqua resti diminuita della vigesima parte di quello, che doveva essere, per sapere quanto sarà diminuita l' acqua, che esce nel medesimo tempo, e sotto la stessa altezza, da un lume di diametro maggiore, come sarebbe di un numero M di quattrini, basta moltiplicare un tale difetto assoluto, cioè 6. once, o pure mezza libbra, per il numero M de' quattrini, che misurano il diametro di esso lume, e tanto sarà il defalco, che importerà il soffregamento dalla vera quantità dell' acqua, che dovea quel lume somministrare; come se il diametro sarà d' un soldo, o di 3. quattrini, in vece di 90. libbre, che ne dovrebbero uscire, ne getterà quel lume solo libbre 87. e mezzo, dovendosi defalcare 3. mezze libbre; e così degli altri casi.

PROPOSIZIONE VI.

Dato il diametro A B di un lume, che tramanda attualmente la quantità d' acqua C E in un dato tempo, trovare il diametro F G d' un altro lume, da cui nello stes-

lo stesso tempo sgorgar possa la quantità d'acqua H L, sotto la medesima altezza d'acqua, non ostante il soffregamento, che patirà l'acqua nell' uscire dall' orlo di esso.

Si trovi, per l'antecedente, la diminuzione d'acqua E D, corrispondente alla resistenza nata dal soffregamento nel margine del lume A B; e come D C a D E, così stia A B alla T O, e come D C ad H L, così stia il quadrato A B al quadrato O P, essendo posta O P perpendicolare alla T O; e divisa T O per mezzo in R, si congiunga R P, col quale raggio R P sia descritto il cerchio Q P S; e finalmente pongasi F G eguale a Q O; Dico che il lume del diametro F G, ovvero Q O, soddisfarà al quesito; imperocchè, posta ancora D E ad L I, come A B a Q O, per essere il quadrato O P eguale al rettangolo Q O S, ovvero O Q T (essendo i punti O, T egualmente distanti dal centro R) cioè all eccesso del quadrato O Q sopra il rettangolo T O Q, avremo il quadrato O Q eguale alla somma del quadrato O P, e del rettangolo Q O T. e moltiplicando il tutto in D C, si farà il prodotto dal quadrato O Q in D C eguale a i prodotti del quadrato O P nella D C, e del rettangolo T O Q nella stessa D C; ma essendo D C ad H L, come il quadrato A B al quadrato O P, sarà il prodotto del quadrato O P in D C eguale al prodotto del quadrato A B in H L; dunque il prodotto del quadrato O Q in D C eguaglia il prodotto del quadrato A B in H L, e del rettangolo T O Q nella D C; ma D C è a D E, come A B a T O; onde T O in D C uguaglia D E in A B, ed il rettangolo T O Q moltiplicato in D C pareggia il prodotto di Q O, in D E, in A B; sicchè il prodottto del quadrato O Q in D C equivale a' prodotti del quadrato A B in H L, e di O Q in D E, in A B; di più essendo A B a Q O, come D E ad L I, il rettangolo di O Q in D E pareggia quello di A B in L I, ed il prodotto di O Q in D E in A B eguaglia il prodotto del quadrato A B in L I; sicchè finalmente il prodotto del quadrato O Q in D C, è eguale a' prodotti del quadrato A B in H L, e dello stesso quadrato A B in L I, cioè pareggia il prodotto del quadrato A B in tutta la H I, onde avremo, essere il quadrato A B al quadrato O Q, come D C ad H I; e però siccome dal lume A B sarebbe provenuta senza impedimento l'acqua D C, così dal lume Q O, ovvero F G sgorgherebbe senza un simile impedimento l'acqua H I; ma siccome D E è la diminuzione dell'acqua cagionata dal soffregamento del margine A B, così sarà I L la diminuzione originata dal soffregamento dell'orlo F G, essendo per costruzione tali diminuzioni proporzionali a' diametri; dunque la proposta quantità residua H L proverrà dal lume F G sopra determinato, non ostante il soffregamento del suo contorno: Il che ec.

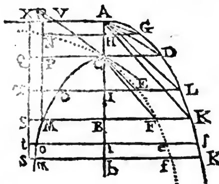
SCOLIO.

Questa resistenza, nata dal soffregamento delle parti del fluido, non pare che possa dipendere, se non o dall' attaccarsi dell' acqua all' orlo de' lumi, per la quale aderenza resta diminuita la capacità di esso lume, che lascia libero il passo alle parti intermedie; o dalla diminuzione della velocità in quelle parti, che urtano alquanto obliquamente nel medesimo orlo, perdendo così quanto aveano di moto perpendicolare allo stesso, proseguendo con quella porzione sola, che aveano nella direzione parallela al margine del medesimo; o in parte dall' una, in parte dall' altra cagione.

Comunque fiasi, se ad alcuno parrà verisimile, che tale resistenza ceda alla maggiore velocità, in maniera che la diminuzione della quantità d' acqua, che dovea scaricarsi dal lume, tanto sia minore, quanto la detta velocità è maggiore, si potrà dimostrare la seguente.

PROPOSIZIONE VII.

Se nella parabola A L K B, le cui ordinate K B, L I esprimono le velocità competenti all' acqua nell' uscire dall' aperture B, I del tubo A B, ovvero le quantità che in egual tempo scaricare si dovrebbero per le dette aperture supposte eguali, si prenderanno le porzioni dell' ordinate K F, L E corrispondenti alle diminuzioni della quantità d' acqua, o della velocità, nate dal soffregamento nell' orlo delle dette aperture, la curva F E C quindi originata, avrà per asintoti la medesima curva parabolica A L K, e la retta A V, che la tocca nella cima A.



Imperocchè, essendo per l' ipotesi dello scolio antecedente queste diminuzioni reciproche alle velocità, sarà K F ad L E, come L I a B K; onde crescendo in infinito la ragione di K B ad L I, con ampliare la parabola all' ingiù, e prendere una maggiore ordinata *b* K più lontana dalla cima A, così crescerà in infinito la ragione di L E a K F, onde K F diverrà nelle maggiori lontananze minore in infinito; e però la curva E F ha per asintoto la parabola A L K; in oltre i rettangoli B K F, I L E saranno sempre eguali, e crescendo nell' avvicinarsi alla cima A le porzioni L E, ma diminuendosi le ordinate L I, verranno a pareggiarsi in un certo punto dell' asse C, dove la diminuzione della velocità D C eguaglia appunto la velocità primitiva C D, e sarà allora il quadrato dell' ordinata C D eguale a ciascuno de' rettangoli B K F, I L E. Poi continuando la descrizione della curva; le diminuzioni H N diventeranno negative, ed essendo reciproche all' ordinate H G, che diminuiscono in infinito andando verso la cima A, cresceranno le H N applicate alla nuova curva in infinito, e però averanno per asintoto la retta A V tangente della parabola nella cima A. Il che ec.

Corollario I.

Essendo grandissima la velocità dell' acqua, espressa dall' ordinata K *b*; sarà piccolissima la diminuzione dipendente dal soffregamento, espressa dalla porzione K *f*; sicchè appena meriterà d' essere posta in conto.

Co-

Corollario II.

Se è vera queſta ipoteſi, vi ſarà tale altezza A C, che per eſſere troppo piccola, non laſcerà da un lume ivi aperto ſcappare il fluido, perchè tutta la velocità D C, che può cagionare la detta altezza, verrà diſtrutta nel ſoffregamento all'orlo di eſſo lume, come quando un piccolo anello infuſo nell'acqua, e indi ſollevato, ne porta via un ſottiliſſimo velo che dall'orlo di eſſo non cade, per non avere forza da vincere la coerenza delle parti dell'acqua attaccate al margine di eſſo. Queſta altezza A C ſarà quaſi inſenſibile, e forſe quella ſola, che ſuole corriſpondere al colmeggiare, che fa l'acqua ſopra l'orlo de' vaſi, l'altezza del qual colmeggiamento non laſcia però traboccare l'acqua dall'orlo medeſimo, con tutto che ſia aperto l'eſito all'acqua, quanto mai eſſer poſſa, eſſendo maggiore la forza dell'aderenza delle parti dell'acqua, che la velocità, la quale può imprimerle quella piccola altezza.

Corollario III.

Onde ſe piccoliſſima è l'altezza A C, piccola ancora ſarà l'ordinata C D, e molto minori, e più inſenſibili ſaranno le diminuzioni di velocità competenti all'altre maggiori altezze, cioè le porzioni L E, K F, che ſempre vanno diminuendo verſo le parti inferiori della parabola.

Corollario IV.

Per deſcrivere queſta curva F E C N, tirata qualunque ordinata della parabola L I, e congiunta la corda A L, baſta dal punto C tirare la C E parallela ad A L (ſiccome ancora nelle parti ſuperiori, tirando l'ordinata G H, congiunta A G, baſta dal punto medeſimo C condurre la parallela C N) imperocchè eſſendo il quadrato D C al quadrato L I, come C A ad A I, cioè (per le parallele A L, C E) come L E ad L I, ſaranno L E, D C, L I continuamente proporzionali, onde il rettangolo I L E ſarà eguale al quadrato D C; e però il punto E nella curva, di cui ſi tratta.

Corollario V.

La tangente di queſta curva in C cioè la C V ſarà parallela alla corda A D, come appariſce per la coſtruzione ultimamente data.

Corollario VI.

Poſta A X eguale al lato retto della parabola A L K, e condotta X S parallela ad A B, ſe per lo punto C ſi deſcriverà l'iperbola ordinaria C O M tra gli aſintoti A X, X S, ſarà il quadrato dell'ordinata F B nella curva ſopra deſcritta, eguale ſempre al rettangolo C B M, ſiccome il qua-

drato della E I eguale al rettangolo C I O, e però i quadrati delle dette ordinate sono proporzionali a' suddetti rettangoli; perchè essendo il quadrato K B eguale al rettangolo A B S, ed il rettangolo B K F eguale al quadrato C D, cioè al rettangolo A C Q, il rimanente rettangolo K B F eguaglierà il residuo rettangolo C B S Q, ovvero A B M R, e però come B M ad F B, così K B a B A, ovvero la stessa F B a B C, ed il quadrato F B eguaglierà il rettangolo C B M.

Corollario VII.

Le linee poi F B, E I saranno come i rettangoli K B M, L I O, essendo ciascuno di questi eguale al rettangolo del lato retto A X nell' ordinate suddette F B, E I rispettivamente, imperocchè si è veduto essere B M ad F B, come K B a B A, cioè come A X, ovvero S B ad K B, onde il rettangolo K B M eguaglia il rettangolo della costante S B in B F; e così L I O è eguale a T I E ec.

PROPOSIZIONE VIII.

Le diminuzioni delle quantità dell' acqua, cagionate dal soffregamento negli orli de' lumi, che danno all' acqua stessa passaggio, saranno in ragione composta della diretta de' diametri de' lumi, e della reciproca delle loro medie velocità.

Ciò è manifesto, perchè in parità di velocità sono le dette diminuzioni come i diametri de' lumi, ed in parità de' diametri de' lumi seguono, nell' ipotesi suddetta, la ragione reciproca delle velocità.

Corollario.

Se i diametri de' lumi saranno, come le velocità, cioè in ragione suddoplicata dell' altezze, eguale sarà la diminuzione, che patirà l' uno, e l' altro lume nel soffregamento.

CA-

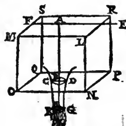
CAPITOLO II.

Della figura dell' acqua, ch' esce da' vasi, senza essere sostenuta.

PROPOSIZIONE IX.

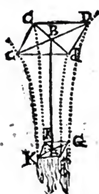
D*Eterminare la figura dell' acqua cadente da un lume orizzontale.*

Sia l'altezza dell'acqua in un vaso racchiusa B A, e si mantenga sempre alla medesima altezza, coll' infondervi altrettant' acqua, quanta ne esce, o per mezzo d'una fonte perenne, o d' un' sifone adattatovi; e dalla apertura D C fatta orizzontalmente nel fondo di esso vaso, esca l' acqua sotto la forma del solido D I C. Cercasi di quale specie di figura egli sia: prescindendo dalle resistenze, sì del soffregamento nell' orlo del lume D C, sì dall' incontro dell' aria ec.



Suppongasi primieramente la detta apertura circolare, e per lo centro B passi il piano verticale B A E, la cui sezione col supremo livello dell' acqua sia la retta B A F, e con l'area del lume sia il diametro D C: e per lo punto C, fra gli asintoti B A, A F sia descritta l' iperbola del quarto grado C K I, in cui l'ordinata H K all'ordinata B C stia in suqquadrupla proporzione dell'altezze reciprocamente prese A B, A H, e girando questa iperbola intorno il suo asse A B H produca il solido C K I G D: Dico essere questo la figura dell' acqua cadente; imperocchè segandola col piano G K parallelo al lume D C, averemo il cerchio G K al cerchio D C, come reciprocamente la velocità in B alla velocità in H, scaricandosi egual copia d' acqua nel medesimo tempo per l' una, e per l' altra sezione; dunque il quadrato del raggio H K al quadrato del raggio B C è in sudduplicata ragione dell'altezza B A all'altezza A H, ma le ordinate H K, B C sono di nuovo in sudduplicata ragione de i suddetti quadrati: dunque saranno in suqquadrupla ragione delle suddette altezze reciprocamente prese, B A, A H; e però il contorno della figura C K I G D è determinato dall' iperbola del quarto grado sopra descritta. Il che ec.

Se poi la figura del lume aperto nel fondo fusse quadrata, o triangolare ec. col-

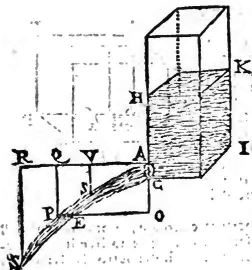


collo steſſo argumento ſi dimoſtrerà, che il corpo dell' acqua cadente è circoſcritto da tante curve iperboliche C K, G D del quarto grado, che paſſano per ciaſchedun' angolo, e dalle curve ſuperficie iperboliche interpoſtevi, adiacenti a ciaſcun lato della figura, e così dicaſi de' lumi di figure ellittiche, o irregolari ec.

Nel che però ſi preſcinde, come già ſi è avvertito, dalla reſiſtenza sì del ſoffregamento, sì dell' aria, per cui ſcendendo la vena dell' acqua viene ritardata, anzi diviſa, e diſperſa in minutiſſime gocciole, in vece di ſtare continuamente unita al filo iperbolico, che dovrebbe formare.

PROPOSIZIONE X.

La curva deſcritta dall' acqua, ch' eſce da un vaſo per un lume verticalmente aperto ne i lati di eſſo, è una parabola.

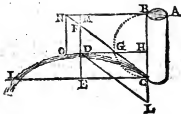


Sia primieramente la direzione del lume A C, o del cannello ivi adattato, la retta A Q orizzontale. Si moverà allora qualunque goccia con doppio moto, l' uno equabile per la direzione A Q, ſecondo la forza impreſſagli dal carico dell' altezza dell' acqua, che vi ſta ſopra, come H A; e l' altro accellerato naturalmente dalla gravità della ſteſſa acqua, che liberamente può cadere per l' aria. Avendo adunque la goccia in A l' impeto competente alla caduta H A, dovrà nell' orizzonte ſcorrere lo ſpazio A Q duplo di H A nello ſteſſo tempo, in cui per forza della gravità viene tirata in giù per lo ſpazio A O, ovvero Q P eguale alla ſteſſa H A: dunque nel fine del detto tempo eguale a quello della caduta da H in A, dovrà trovarſi la goccia nel punto P; determinando poi qualunque altro tempo maggiore, o minore A R, in cui ſarebbe venuta la goccia per forza dell' impeto impreſſole per la direzione orizzontale da A in R (eſſendo gli ſpazj del moto equabile proporzionali a' tempi) eſſendo frattanto abbaſſata dalla gravità per lo ſpazio verticale R S, è manifeſto, che ſaranno gli ſpazj Q P, R S fatti con moto accellerato per forza della gravità, in ragione duplicata de' tempi, o degli ſpazi ſcorſi equabilmente nell' orizzonte, A Q. A R; dunque il viaggio della goccia è per una curva di tale proprietà, in cui le ordinate Q P, R S ſieno come i quadrati delle diſtanze Q A, R A; ma queſta è la proprietà eſſenziale della parabola; dunque le goccie, che vengono fuori dal punto A deſcrivono una parabola A S P. Similmente le goccie, che eſcono da qualunque altro punto C, deſcrivono una parabola come C E, e così tutte l' altre; e però tutta la vena d' acqua, ch' eſce dal lume verticale A C,

e co'

è come un fascetto di tante curve paraboliche. Il che ec.

Sia in secondo luogo la direzione, per cui esce l'acqua da un lume, o da un cannello C, inclinata all'orizzonte, ne nascerà quindi altresì tale parabola, che averà per tangente la medesima direzione del cannello C F, e si determinerà nella seguente maniera. L'altezza dell' acqua B C serva per diametro al mezzo cerchio B G C, tagliato in G dalla direzione del cannello C F, e condotta l'orizzontale H G pel punto G, si prolunghi altrettanto in G D, e tirata la verticale D E parallela a B C, si descriva sull'asse D E per lo punto C la parabola C D I, che ha la sua cima in D. Questa sarà la strada, che dee fare lo zampillo dell' acqua. Imperocchè, tirate le orizzontali B M N, C E I, e pel punto D condotta D L parallela a C F, che concorre colla B C in L, per essere D L dupla di C G, siccome D H di H G, il quadrato D L sarà quadruplo del quadrato C G, o diciamo del rettangolo B C H, cioè B C L (per essere ancora C H eguale a C L) per tanto il detto quadrato D L eguaglia il rettangolo della C L nel quadruplo della B C; ma se nel tempo della caduta per B C la goccia cadente passerebbe con moto equabile, e colla stessa velocità uno spazio duplo di B C, certamente nel tempo della caduta per la sola H C, ovvero C L, o pure F D (il qual tempo sta a quello della caduta per B C in ragione sudduplicata degli spazj H C, B C, cioè sta come C G a C B) la stessa goccia passerà collo stesso impeto uno spazio duplo di C G, quale è C F, ovvero L D, adunque nel tempo della caduta per H C, ovvero per C L, cioè per F D la goccia nella direzione del cannello passerà lo spazio C F, cadendo frattanto da F in D; e però il punto D sarà nella strada, per cui passa lo zampillo dell' acqua; ed essendo il quadrato D L eguale al rettangolo C L nel quadruplo di B C, sarà il punto D nella parabola, il cui diametro la stessa C L, e lato retto il quadruplo di B C, e per essere D E eguale a C H, cioè a C L, o pure a D F, è manifesto, che la C F sarà tangente della detta parabola; siccome per essere C E, ovvero H D dupla di H G, il quadrato C E è quadruplo del quadrato H G, o sia del rettangolo C H B, e però uguaglia il rettangolo della C H, ovvero D E, nel quadruplo di B H, ovvero D M; onde M D è la sublimità, cioè la quarta parte del lato retto appartenente all'asse D E di detta parabola, siccome B C è la quarta parte del lato retto del diametro C L. Nè può dubitarsi, che gli altri punti, per cui passa la goccia, non sieno altresì nella stessa parabola, mercè della composizione del moto equabile per la C F N, col moto accellerato nelle verticali parallele ad F D; perchè la scesa F D alla scesa N O sarà in duplicata ragione de' spazj fatti con moto equabile C F, C N; dunque la via dell'acqua, che sgorga pel lume, o canale C, secondo la direzione C G è la parabola C D O I. Il che ec.



Co-

Corollario I.

Si avverta, che ancora nel primo caſo l' altezza dell' acqua H A è la ſublimità della parabola A S P, eſſendo la quarta parte del ſ... lato retto, perchè eſſendo P Q la metà di Q A, e come P Q a Q ., così eſſendo queſta al lato retto, ſarà Q A la metà del lato retto, e la P Q, ovvero A H la quarta parte di eſſo: come nel caſo ſecondo ſi è dimoſtrato, eſſere la B C, e la M D ſimilmente la quarta parte del lato retto appartenente a' diametri C L, D E riſpettivamente.

Corollario II.

Si può ancora notare, che la velocità dello zampillo dell'acqua in ciaſcun punto del ſuo zampillo parabolico, è ſempre tale, quale ſi ſarebbe acquiſtata l'acqua medeſima cadendo dall'altezza del ſupremo livello B M N, fino a quel punto, dove di man in mano eſſa ritrovaſi: così la velocità in C è quanta ſi ſarebbe acquiſtata cadendo per B C; in D quanta cadendo per M D, ovvero B H (avendo la ſolita C H, ovvero E D, diſtrutta quella parte della velocità originata dalla caduta B C, che ſi era acquiſtata cadendo per H C dopo B H) ſimilmente la velocità in O è quale ſi acquiſterebbe cadendo per N O; e così ſempre, intendendoſi tanto eſſere caduta di fatto la goccia, quanta differenza di altezza vi è tra il livello B M N, e il punto O: ſiccome realmente dal detto livello A B è caduta l'acqua in O, per qualunque ſtrada ſiavi arrivata.

Corollario III.

Di più, ſtante queſta dottrina, ſi può indovinare l'altezza dell'acqua H A che è nel reſervatorio H I, dal vedere ſolamente il ſuo zampillo A P fatto colla direzione orizzontale A Q; perchè la detta H A ſarà un quarto della terza proporzionale dopo l'altezza A O, e l'ampiezza O P del medeſimo zampillo; e quando abbia un'altra direzione inclinata (come nel ſecondo caſo) ritrovando il colmo, cioè il punto altiſſimo D dello zampillo parabolico C D I, ſarà la B H un quarto della terza proporzionale dopo D E, E C, onde congiunta l'altezza D E, ſi avrà nota tutta l'intera altezza B C dell'acqua chiuſa nel vaſo A B C.

SCOLIO.

Si vede, che quanto più la direzione del cannello C è ſollevata dall' orizzonte, la parabola C D I rieſce più alta: dimanierachè, elevandoſi il cannello C perpendicolarmente all'orizzonte, ſi dovrà parimente alzare lo zampillo parabolico alla ſteſſa altezza dell'acqua chiuſa nel vaſo, perchè la corda C G conviene col diametro B C, e l'orizzontale H G D ſi confonde colla B M N; ed in fatti la ſperienza moſtra, che tanto aſcende l'acqua ne' getti delle fontane, quanta è l' altezza del reſervatorio, da cui diſcende: ſe non in quanto l'aria reſiſtendo al movimento dell'acqua, ſuo-

le te-

le tenerla alcune dita più bassa, e talora qualche piede, se il reservatorio sarà d'altezza di 18. e più piedi in maniera tale, che per ogni piede d'altezza del getto, vi debbano corrispondere nel reservatorio altrettante parti trecentesime di più di tutta l'altezza di esso getto: come se il getto è di 15. piedi d'altezza, di cui la trecentesima parte importerebbe 7. linee, e un quinto, dovrà l'altezza del reservatorio avere 15. delle dette trecentesime parti, che fanno 108. linee, o sia 9. dita di più; se fusse il getto piedi 20., la cui trecentesima parte è quattro quinti d'un dito, dovrà l'altezza del reservatorio, oltre i piedi 20. avere altrettante di quelle trecentesime parti, che fanno 16. dita, cioè un piede, e un terzo di più; il che si confronta colla regola, che da il Mariotte nel Trattato del movimento dell'acque parte 4 disc. 1. reg. 2.

Questa stessa osservazione, dell'ascendere l'acqua, prescindendo dagli impedimenti, ad altezza pari a quella del reservatorio, dimostra essere verissimo, che l'acqua esce da' vasi con una velocità pari a quella, che si sarebbe acquistata cadendo dall'altezza, che avea nel vaso stesso. mentre la può ricondurre appunto alla medesima altezza, come di sopra abbiamo supposto, e come viene asserito ancora dal Torricelli, dal Baliani, dal Borelli, dal Guglielmini, dal Newton nella seconda edizione de' suoi Principii lib 2. prop. 36. (benchè nella prima edizione avesse proposta un' altra proporzione, seguitata al solito dal Viston suo compilatore) e dall' Ermanno nell' appendice alla sua Foronomia num. 10. ove cerca di darne una dimostrazione più esatta.

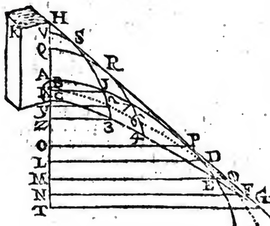
Non è però senza difficoltà questo asserto, perchè sebbene le sperienze ci rendono certi, essere la velocità dell'acqua in sudduplicata ragione dell' altezza, pare che nel medesimo tempo ce la dimostrino assai minore di quella che si acquisterebbe un grave cadendo dalla medesima altezza, che avea l'acqua nel vaso; e la differenza è tanto grande, che dubito possa rifondersi nelle resistenze dell'aria, e del soffregamento nel contorno dell' apertura, da cui ha l'esito. Perchè quando ancora non vogliamo stare sul rigore de' piedi 15. e una linea, che può scendere un grave dalla quiete partendosi in un minuto secondo con moto accelerato, come dimostra Cristiano Ugenio nel suo Orologio Oscillatorio: nella quale supposizione, la velocità conceputa cadendo dalla detta altezza sarebbe tale da scorrere trenta piedi, e un sesto orizzontalmente con moto equabile, nel medesimo tempo d'un minuto secondo, e per conseguenza 1810. piedi in un minuto primo; quando, dico, non si voglia stare su questo rigore, e si ponga, che l'acqua scenda in un minuto secondo soli 12. piedi, come il Mersenno, ed il Mariotte ricavano da immediate osservazioni, nelle quali è frammischiata la resistenza dell'aria, sicchè la velocità conceputa da tale caduta farebbe passare con moto equabile in un secondo minuto piedi 24. ed in un minuto primo piedi 1440., paragonando ciò a qualunque sperienza o del Guglielmini, o del Mariotte, si trova un grandissimo divario; perchè il piede di Parigi è circa dieci once, e un quarto del piede di Bologna, saranno 12. piedi di Parigi eguali a piedi dieci, ed once 3. di Bologna, a cui nella tavola del Guglielmini corrisponde una velocità, che passi in un minuto primo 692. piedi, ed undici once di Bologna, ma la velocità acquistata dalla caduta di 12. piedi di Parigi, ovvero piedi 10 once 3. di Bologna dovrebbe passare in un minuto primo piedi 1440. di Parigi, che sono 1230 di Bologna; dunque la velocità dell'acqua, che sgorga da un vaso alto piedi 10. once 3. di Bologna è assai minore di quella, che si sarebbe acquistata l'acqua cadendo ancora per aria (non che nel vuoto) dal-

dalla medesima altezza; e sta quella a questa, come 1663. a 2952.

Ma per non imbrogliarci nella riduzione delle misure, si prenda qualche sperienza del Mariotte. Secondo quest' Autore, un piede cubico d' acqua pesa 70. libbre, o pure uguaglia 35. pinte di due libbre l' una. Se questo cubo si ridurrà in un parallelepipedo, che abbia per base il quadrato di 3. linee, cioè della quarantottesima parte della lunghezza d' un piede, la lunghezza di tale parallelepipedo sarà 2256. piedi, e se la base in vece di essere quadrata, fusse circolare, col diametro pure di 3. linee, sarebbe ridotto il detto cubo in un cilindro lungo piedi 2871.. e un quarto in circa: ma dicasi per ischivare le minuzie, piedi 2870. dunque ogni libbra d' acqua, formata in un cilindro, che abbia per base l' apertura circolare di 3. linee, sarà lunga piedi 41. in circa; ma asserisce il suddetto Mariotte nel Trattato sopraccitato parte 3. disc. 2. che *per più sperienze esattissime, un apertura rotonda di 3. linee di diametro essendo a piedi* 13. (non che soli 12.) *sotto la superficie superiore dell' acqua d' un largo tubo, dava in un minuto 14. pinte di quelle, che pesano due libre, e di cui 35. fanno il piede cubico:* dunque l' acqua uscita in un minuto dall' apertura circolare di 3 linee pesava libbre 28., e conformata in un cilindro, che avesse per base la detta apertura, si sarebbe stesa a una lunghezza di piedi 1148. e questa è la velocità, che mostra di avere l' acqua uscita da un vaso con 13. piedi di altezza sopra di se, assai minore di quella che si acquisterebbe cadendo liberamente ancora da soli 12. (non che 13.) piedi d' altezza, la quale velocità, come abbiamo veduto, le farebbe passare in un minuto primo una lunghezza di 1440 piedi: e cadendo da piedi 13. ne passerebbe circa a 1493. Quale sia lo scioglimento di questa difficoltà, si lascia a più sollevati ingegni, e di maggior ozio abbondanti l' indagarlo, per maggiore perfezione di questa scienza.

PROPOSIZIONE XI.

Quando l' altezza A C del lume, per cui esce l' acqua, è di sensibile grandezza, le gocce, ch' escono da varj punti A, B, C, descrivono varie parabole, le quali s' intrecciano vicendevolmente, segandosi, e componendo come una funicella raggruppata in un nodo, oltre il quale poi si vanno separando l' una dall' altra, come appresso esporremo.



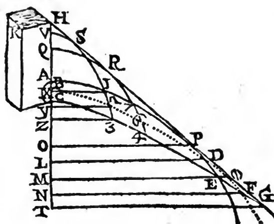
Sia A P la parabola, che descrivono le gocce, le quali escono dalla cima dell' apertura A, e sia C E la parabola descritta dall' infime gocce tramandate dal punto C, siccome la B D venga da un punto di mezzo B, è manifesto, che per essere la sublimità H B maggiore della sublimità H A, e minore della sublimità H O, sarà la parabola B D descritta dalla goccia B più ampia della pa-

la parabola A P descritta dalla goccia A, ma più angusta della parabola C E descritta dalla goccia C, secondo la diversa grandezza de' lati retti quadrupli delle dette sublimità, a' quali corrispondono nella stessa ragione diverse ampiezze di ordinate alle dette parabole nella stessa distanza dalla cima di ciascheduna. Posta adunque B L eguale ad A H, e conseguentemente A L eguale ad H B, e però il rettangolo H A L eguale al rettangolo H B L, ed il quadruplo di quello sarà eguale al quadruplo di questo: cioè il quadrato dell' ordinata dal punto L tanto alla parabola B D, che alla parabola A P, è della stessa quantità, e però queste due parabole hanno comune l'ordinata L D condotta dal punto L, e si intersegano amendue nel punto D, andando quindi in poi disgiunte, mutato vicendevolmente il loro sito, sicchè la superiore A P diventa inferiore, e la B D ch' era inferiore, si fa superiore ad essa. Similmente posta C M eguale ad A H, si mostrerà, che le due parabole A P, C E hanno comune l' ordinata M E, convenendo insieme in E, ove segandosi cambiano alla stessa maniera il loro sito; ed altresì posta C N eguale ad H B, si mostrerà che le parabole B D, C E hanno comune l' ordinata N F, e si congiungono in F, separandosi quindi in poi con sito contrario. Dunque ciascuna parabola concorrendo con ciascun' altra in diverso punto, si farà come una funicella intrecciata di varj fili, i quali oltre il concorso di tutte, dove si restringono quasi in un nodo, con più larga tessitura si anderanno spargendo, e dilatando in infinito, ammettendo fra le sue parti molt' aria interposta. Il che ec

PROPOSIZIONE XII.

Ritrovare i limiti della funicella, come sopra, intrecciata dall' acqua, e determinare altre sue circostanze.

Essendo che dove concorre la parabola A D colla B D riesce la distanza B L eguale ad A H, come si è veduto, e dove concorre la parabola B D colla C E, diventa la distanza C N eguale a B H, e così dell' altre ne viene, che posta A O eguale alla sublimità A H; sicchè il ponto O sia foco della superiore parabola A P, e ordinata la O P, sarà il punto P termine delle interfezioni dalla banda di sopra, perchè niuna parabola, prima di giugnere al punto P, potrà intersecarsi con verun' altra; e dall' altra parte, posta C T eguale alla sublimità C H, sicchè il punto T sia foco dell' infima parabola C E, e ordinata T G, sarà il punto G il termine delle interfezioni dalla banda di sotto, perchè niuna parabola potrà più intersegarsi oltre al punto G, ma tutte le interfezioni, o intrecciature di tali parabole si faranno tra mezzo li due punti P, G, essendo la porzione P G intercetta fra le due ordinate da' fochi della suprema, e dell' infima parabola, che sono O, T, l' intervallo delle quali ordinate O, T è duplo dell' altezza dell' apertura A C (essendo H T dupla di H C, come H O dupla di H A, e però la rimanente O T dupla della residua A C) ed il punto E, in cui la suprema parabola A P concorre coll' infima C E, pare che corrisponda alla parte della funicella più ristretta, e più serrata dell' altre, perchè tutte le parabole concorrono colla suprema tra il punto P, ed il punto E, coll' infima poi tra il punto E, ed il punto G: sicchè tanto sopra, che sotto il punto E si vanno tutte le parabole allontanando l' una dall' altra, e più largamente spargendo sopra, e sotto l' infima parabola C E, la quale solo fino al punto E resta inferiore a tutte, indi appoco appoco si



co ſi va sollevando, finchè giunta al punto G ſi fa a tutte ſuperiore, ſiccome viceverſa la ſuprema parabola A P dal punto E in giù ſi fa inferiore a tutte l'altre, e dal punto E in ſu le va ſegando, e ſollevandoſi ſopra di eſſe, fino al punto P, dove reſta liberamente ſuperiore ad ogn'una; ed in ogni interſezione ſucceſſivamente qualunque inferiore alla ſuprema ſi fa ſuperiore ad eſſa, e però ſcavalca tutte l'altre: determinandoſi il luogo, in cui ciaſcuna a vicenda ſi fa ſuperiore a tutte, dove l'ordinata di qualunque parabola viene dal ſuo foco, cioè nella diſtanza dal vertice eguale alla ſua ſublimità; di maniera che generalmente, diviſa O H per mezzo in A, l'ordinata O P concorre colla ſuprema parabola che ha il ſuo vertice in A, nel punto P, ove ultimamente gode la prerogativa d'eſſere ſuperiore a tutte, e quindi in poi la va perdendo: ſimilmente, diviſa H T per mezzo in C, ſi trova la cima C della parabola C E, di cui l'ordinata T G moſtra il punto G, in cui comincia ad eſſere ſuperiore a tutte, eſſendo fin allora ſtata inferiore, e diviſa H M per mezzo in B ſi trova la cima B della parabola B D, che nel punto 8. dell'ordinata dal punto M reſta ſuperiore all'altre; imperocchè neſſuna parabola ſopra l'ordinata dal foco può eſſere ſegata da una ſua inferiore, ed abbaſſarſi ſotto di eſſa; ma ſolamente in detto ſito ſuperiore all'ordinata dal foco può eſſere ſegata da qualche ſua ſuperiore, la quale però nello ſteſſo tempo le diventa inferiore; e neſſuna parabola ſuperiore può ſegare una data parabola ſotto l'ordinata dal foco, perchè la ſublimità della ſegante, la quale è minore di quella della ſegata, dovrebbe uguagliare la diſtanaa dalla cima della parabola medeſima ſegata: e però non può accadere, che veruna parabola ſtia ſopra a quella, la cui ordinata batte nel ſuo foco. Neſſuna parabola poi ſi fa inferiore a tutte, ſe non la C E ſopra il punto E, e la A P ſotto il punto E, ancora tra i limiti P, G delle interſezioni; imperocchè non può la C E eſſere ſegata da veruna ſuperiore, ſe non ſotto il punto E, per eſſere la diſtanza C M eguale ad A H, e minore di qualunque altra ſublimità, per eſempio di H B, cui ſi dee porre eguale la diſtanza C N per ritrovare l'ordinata all'interſezione N F: nè veruna parabola può ſegare la ſuprema A E, ſe non ſopra il punto E, per eſſere M A eguale a C H maggiore di qualunque altra ſublimità B H, cui dovrebbe porſi eguale A L, per trovare l'ordinata L D corriſpondente al concorſo delle due parabole.

Corollario I.

Quindi è chiaro, che la parabola, la quale nel concorſo E della ſuprema

ma A D coll'infima C E, resta superiore a tutte, è quella, che viene dal centro B dell'apertura A C; perchè essendo A M eguale a C H, se ancora H B è eguale a B M (come ricerca l'essere la parabola superiore all' altre nell'ordinata, che si tira per M) sarà altresì A B eguale a B C, ed il punto B è il centro del lume A C.

Corollario II.

Fatto l'angolo semiretto M H P, la retta H P toccherà tutte l' esteriori parabole, per essere sempre la distanza M H dupla della M B intercetta fra il vertice, ed il foco; di maniera che se altre parabole superiori, o inferiori Q R, V S ec. fossero descritte, continuando all' insù, o all' ingiù la sezione del lume, ovvero forando con varie altre aperture il vaso H C K nella stessa linea verticale H C, sempre la medesima retta H P, passerà pel convesso di tutte le parabole descritte dall' acqua, che uscisse per queste aperture, toccandole dove si fanno superiori all' altre nel loro intrecciamento, e limitando il luogo, oltre al quale non possono sollevarsi.

Corollario III.

E' manifesto altresì, che lo zampillo dell'acqua tramandata da un lume verticale con direzione parallela all' orizzonte, non può mai giugnere ad una distanza orizzontale maggiore dell'altezza del supremo livello dell' acqua sopra quell'orizzonte; ma solo al più ad una distanza eguale a detta altezza (cioè dove viene toccata la curva del getto parabolico dalla retta H P) e negli altri luoghi si ristringe sempre a minore distanza.

PROPOSIZIONE XIII.

Determinare le parti sincrone dell' acqua, che esce da un vaso per un lume verticale.

Si pongano nell'asse dal vertice di ciascuna parabola le eguali porzioni A X, B Y, C Z, e si tirino l'ordinate a ciascuna parabola X 1, Y 2, Z 3. E' manifesto, che le porzioni delle curve paraboliche A 1, B 2, C 3 saranno descritte nel medesimo tempo eguale a quello della caduta per le porzioni eguali dell'asse A X, B Y, C Z. E queste saranno le parti sincrone dell' acqua, che si doveano determinare.

Corollario I.

Si avverta, che I punti 1. 2. 3. sopra determinati sono altresì in una linea parabolica: perchè essendo il quadrato X 1 quadruplo del rettangolo H A X, e così il quadrato Y 2 quadruplo del rettangolo H B Y, essendo A X, e B Y eguali, sarà il quadrato X 1. al quadrato Y 2 come H A ad H B; e posta H V eguale ad A X, ovvero a B Y, sicchè V X uguaglierà H A, ed V Y uguaglierà H B, avremo che il quadrato X 1. al quadrato Y 2. sta, come la distanza V X alla distanza V Y;

 on-

onde la curva 1. 2. 3. è una parabola, che averà per sublimità la retta H V (per essere il retrangolo H V X eguale ad H A X, cioè alla quarta parte del quadrato X 1.) quale insomma sarebbe descritta dall'acqua, che uscisse da un lume aperto in V, sotto il medesimo livello dell'acqua H K, e che per ciò sarebbe toccata dalla stessa retta H P, di cui nel Coroll. 2. della Prop. antecedente.

Corollario II.

Similmente, descritta ad arbitrio per qualunque punto Q, e colla sublimità H Q un'altra parabola Q R, questa ancora, segando in 7. 6. 4. le parabole A P, B D, C E, ne determinerà le parti sincrone A 7, B 6; C 4 onde conseguentemente riusciranno sincroni ancora gli archi intercetti 1. 7., 2. 6., 3. 4.

Corollario III.

E perchè le medesime parabole A P, B D, C E sono similmente descritte, serviranno anch'elle a determinare gli archi sincroni dell'altre; sicchè si faranno nello stesso tempo gli archi A P, B D, C E, a' quali di fatto corrispondono l'eguali porzioni dell'asse A O, B L, C M. Così ancora le parabole V 3. Q 4. A E, B F, segate dalla stessa parabola C E si faranno nello stesso tempo: ed altresì le parabole V 2, Q 6, A D, C F segate dalla stessa B E: come ancora le V 1., Q 7., B D, C E segate dalla medesima A P; onde gli archi 1. 3., 7. 4., P E, D F sono sincroni, per essere intercetti fra le stesse parabole A P, C E; e così degli altri.

SCOLIO.

La resistenza dell'aria porta molta alterazione alla curva descritta dallo zampillo dell'acqua, e conseguentemente modifica in diversa maniera le cose sopraddette; perchè, se l'aria resiste in ragione delle velocità, o de' loro quadrati, la curva suddetta sarà di tutt'altra natura, che sarei pronto a determinarla, se avessi ozio da stendere tutta la catena delle dimostrazioni, che si ricercano a ciò, e si potrà in altro luogo con miglior comodo stabilire. In tanto, senza più dilungarmi dalla materia, passerò avanti; solo avvertendo, che siccome si è determinato di sopra l'intreccio delle parabole descritte dall'acqua, che esce da un vaso con direzione orizzontale, così potrà il lettore da se stesso investigare quello delle parabole fatte con direzione inclinata all'orizzonte: bastando applicarvi lo stesso metodo, e dimostrazione, senz'altro divario, se non che non vi entra più la considerazione del fuoco delle parabole, per essere A C L un diametro secondario, e non l'asse di esse.

CA-

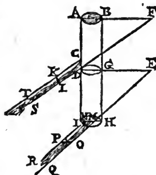
CAPITOLO III.

Della figura dell' acqua ne' tubi, per cui si deriva all' uscire di qualche emissario.

PROPOSIZIONE XIV.

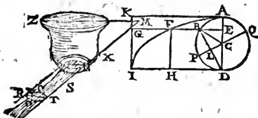
SE l' acqua che esce da un apertura orizzontale M N, o verticale D C venga raccolta in un canale parallelepipedo M R, ovvero D T incli nato all' orizzonte, la superficie dell' acqua corrente dentro il canale suddetto sarà iperbolica quadratica, o sia del secondo grado.

Prolungata la linea del fondo, finchè convenga col supremo livello dell' acqua, contenendo con essa l' angolo M E G, ovvero D F B, si tagli l' acqua corrente col piano O P, ovvero L K parallelo all' apertura, o prima sezione del lume M N, ovvero D C rispettivamente. Sarà dunque la sezione O P alla sezione M N, cioè la linea O P alla M N (per essere uniforme la larghezza del canale) come reciprocamente la velocità in M alla velocità in O (mercechè si trasmette in egual tempo la stessa quantità d' acqua per tutte le sezioni parallele del canale) cioè in ragione sudduplicata dell' altezze, o pure delle rette M E, O E; e raddoppiando l' un' e l' altra ragione, sarà il quadrato O P al quadrato M N, reciprocamente, come la distanza M E alla distanza O E; e per tanto la linea N P è l' iperbola quadratica, o sia del secondo grado, descritta fra gli asintoti M E, E G; e similmente sarà L K a D C in sudduplicata ragione delle D F, F L; e però ancora la linea C K è una iperbola del medesimo grado. Il che ec.



PROPOSIZIONE XV.

Poste le stesse cose, quando il canale recipiente fusse cilindrico, determinare la superficie dell' acqua corrente in esso, o sia l' apertura dell' emissario orizzontale, e verticale.



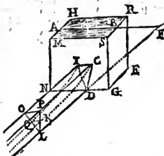
Sia il vaso Z N Y, da cui per l'apertura orizzontale N Y (basterà parlare di questa, potendo ogn' uno applicare lo stesso metodo al caso, in cui l'apertura fosse verticale) scorra l'acqua ricevuta dal tubo cilindrico N R, il di cui profilo inferiore sia la retta T N, che concorre in M col supremo livello dell'acqua Z M. Fra le due T M, N M sia media proporzionale M S, la quale si divida per mezzo in X. Indi fatta la cicloide A F I D, generata dal cerchio A B D, si divida la base D I in H, sicchè stia D I ad I H, come X S ad S N, e condotta H F perpendicolare alla base D I, si ordini per F la retta G F E parallela alla detta base, dalla quale ordinata sia legato il cerchio generatore in B. Dunque, per la natura della cicloide, l' intercetta F B uguaglia l'arco circolare A B, siccome la base D I, cioè tutta la E G, pareggia la mezza periferia A B D; onde la somma de i due residui F G, B E, uguaglierà il rimanente arco B D, e però l' eccesso dell' arco B D sopra il seno B E sarà F G; e condotta la corda B D, cui sia perpendicolare in L il diametro Q C L P, e congiunto il raggio C B, è manifesto, essere il settore C D P B eguale al rettangolo della metà del raggio nell' arco D P B, ed il triangolo C B D pareggiare il rettangolo della stessa metà del raggio nel seno B E; per la qual cosa l'eccesso del primo sopra il secondo, cioè il segmento D P B uguaglierà il rettangolo della metà del raggio nella F G, ed essendo tutto il cerchio eguale al rettangolo della metà del raggio in tutta la circonferenza, cioè nel duplo di E G; e però il detto cerchio al segmento D P B stà come il duplo di G E ad F G, o come il duplo della D I alla I H, ovvero come il duplo di X S (che è M S) ad S N; e per conversione di ragione il cerchio suddetto al segmento D Q A B starà come S M ad M N, cioè in suddoplicata ragione di T M ad M N; se dunque il diametro T R del cerchio T O R parallelo al lume N Y sarà diviso in V, come P Q è diviso in L, sarà il cerchio T O R, cioè N Y al segmento O T O in suddoplicata ragione di T M ad M N, o come la velocità in T alla velocità in N; e però il detto segmento T O V sarà la vera sezione dell'acqua corrente in T, e la linea Y V (determinando similmente gli altri suoi punti) ci rappresenterà la figura della superficie dell'acqua corrente nel proposto tubo cilindrico. Il che ec.

PROPOSIZIONE XVI.

Se il canale, per cui si riceve l'acqua, fosse una doccia triangolare, la cui sezione C D I; la superficie dell'acqua si disporrebbe in una linea iperbolica C R d l quarto grado.

Perchè prolungato il fondo del canale L D fino al livello supremo dell' ac-

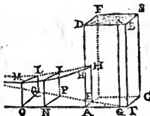
acqua in F, essendo le sezioni dell'acqua nella doccia i triangoli simili C D I, K L Q, sarà la prima sezione alla seconda in duplicata ragione de' lati omologhi C D, K L; ma sono ancora le sezioni reciproche delle velocità, le quali hanno la ragione sudduplicata di F L ad F D; dunque la ragione sudduplicata di F L ad F D uguaglia la duplicata di C D ad K L; e raddoppiando l'una e l'altra, sarà la ragione di F L ad F D uguale alla quadruplicata di C D a K L; onde i punti C, K, sono in una iperbole del quarto grado tra gli asintoti D F, F A. Il che ec.



PROPOSIZIONE XVII.

Spandendosi il fondo A E P N in un trapezio triangolare, la superficie dell'acqua H K M sarà di figura iperbolica ordinaria, cioè del primo grado, se il canale è posto orizzontalmente.

Imperocchè nel piano orizzontale non accelerandosi il moto, ma conservandosi la stessa velocità, tutte le sezioni I P N K, L Q O M saranno uguali; dunque K N ad M O sta come O Q ad N P, cioè come la distanza O G, dal concorso G de' lati del trapezio triangolare A E P N, alla distanza N G; e però H K M; ovvero H I L è una iperbole ordinaria d'Apollonio. Il che ec.



Corollario.

E' manifesto, che tirata la G R parallela ad A H, l' iperbole H K M averà per asintoti le due N G, G R, e l' iperbola H I L le due P G, G R.

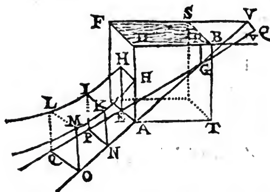
PROPOSIZIONE XVIII.

Poste le stesse cose, ma il trapezio del fondo A E Q O, essendo inclinato all' orizzonte, le curve H K M, H I L saranno iperbole solide di doppio centro, o cubiche del second' ordine, secondo i casi che in appresso distingueremo.

Imperocchè concorra il piano del fondo col supremo livello dell' acqua nella retta V u, congiungendosi i lati del trapezio in G, essendo adunque la sezione K N P I all'altra M O Q L, come la velocità sopra il fondo O alla velocità sopra il fondo N, cioè in ragione sudduplicata di O V ad

 N V,

N V, e le dette sezioni essendo in ragione composta di K N ad M O, e di N P ad O Q, l'ultima delle quali è la stessa, che di N G a G O, sarà dunque la ragione composta di K N ad M O, e di N G a G O, eguale alla suddupplicata di O V ad N V; e raddoppiando le dette ragioni, sarà la ragione composta del quadrato K N al quadrato M O, e del quadrato N G al quadrato G O, eguale a quella delle distanze O V, N V; e il prodotto de' quadrati K N, N G nella retta N V, eguale al prodotto de' quadrati M O, G O nella retta O V; per la qual cosa, avremo il quadrato K N al quadrato M O, come reciprocamente il solido fatto dal quadrato G O nella retta O V, al solido fatto dal quadrato N G nella retta N V; onde la curva H K M è una iperbole solida, di due centri, che sono G, e V.



Se il piano del trapezio A E Q O tagliasse il supremo livello dell'acqua sotto al punto G, sarebbe la stessa cosa, se non che il centro G, a cui terminano le linee, che fanno le basi quadrate de' solidi, allora sarebbe il più lontano, ed il centro V, cui terminano le linee, che sono l'altezze de' medesimi solidi, sarebbe il più vicino.

Ma quando esso trapezio convenisse col livello dell'acqua appunto nell'angolo G del concorso de' suoi lati; allora svanirebbe l' intervallo G V, concentrandosi il centro V col centro G in un solo punto, e le O V, N V essendo eguali alle O G, N G, sarebbe il quadrato N K al quadrato O M, come il cubo O G al cubo N G; onde allora la curva H K M sarebbe un' iperbole cubica del secondo ordine. Il che ec.

Corollario.

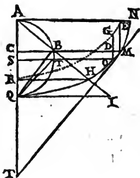
E' manifesto, che dal punto G tirando la G R parallela ad A H (ovvero, quando il trapezio A O Q E concorresse col supremo livello dell'acqua sotto al punto G, di maniera che V fusse il centro più vicino, tirando detta parallela dal punto V) sarebbe questa parallela uno degli asintoti della curva, e l'altro sarebbe la retta G O (ovvero G Q, rispetto all'altra curva H I L) Per l'altro centro più lontano non passando asintoto, ma servendo solo di termine fisso alle distanze, che determinano le dimensioni di que' solidi.

PROPOSIZIONE XIX.

Se il canale, per cui dee scorrere l'acqua, avendo sempre pari larghezza, averà il fondo N M Q di figura cicloidale, determinare la figura della superficie dell' acqua.

Preso qualunque punto M nel fondo cicloidale, e condotta l'orizzontale M C, che sega il cerchio genitore A B Q nel punto B, si conduca la cor-

corda A B, e determinata l'altezza dell' acqua Q R nel punto Q, si faccia come la corda A B alla corda A Q (cioè al diametro del cerchio genitore, per essersi preso il punto Q nel termine dell' asse della cicloide) così l'altezza Q R all'altezza M E; sarà il punto E nella curva E G R ricercata. Imperocchè la velocità in M alla velocità in Q, è come A B ad A Q, essendo questa la ragione sudduplicata dell'altezze A C, A Q; dunque per essere Q R ad M E nella detta ragione, saranno in pari larghezza le sezioni Q R, M E reciproche delle velocità. onde saranno, quali si richiede per iscaricare egual quantità d'acqua da amendue, e però E G R sarà la superficie dell'acqua. Il che ec.



Corollario I.

Si avverta, che per essere Q A ad A B, come Q B a B C, cioè come la tangente della cicloide T M all'ordinata M C, ovvero come l'elemento M O della curva cicloidale all'elemento M D della sua ordinata [essendo O G infinitamente prossima ad M E] sarà ancora M E a Q R, come M O ad M D; e però lo spazio elementare E M O G uguaglierà il rettangolo della costante Q R nell'elemento M O della curva; e ciò sempre; onde integrando, tutto lo spazio curvilineo E G R Q O M uguaglierà il rettangolo della stessa Q R nella curva M O Q, e le parti di quello saranno eguali alle corrispondenti parti di questo: onde il corpo d' acqua, che corre sul fondo cicloidale M O Q sarà proporzionale all'estensione del fondo medesimo M O Q; di maniera che l'acqua F R Q M all' acqua G R Q O, sarà come la curva M Q alla curva O Q: giusto come se il canale fusse uniforme, ed egualmente alto per tutto, col fondo disposto in una retta orizzontale.

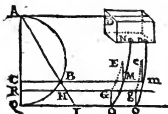
Corollario II.

Si osservi inoltre, che da' punti R, Q tirate le orizontali R H, Q I, segate dalla A B prolungata in H, I, sarà sempre l'intercetta I H eguale alla M E, essendo M E a Q R, come A Q ad A B, ovvero come A B ad A C, cioè come I H a Q R.

PROPOSIZIONE XX.

Qualunque sia la linea del fondo N M O, retta, o curva, trovare generalmente la superficie dell' acqua E G nel canale, che la riceve.

Si faccia il mezzo cerchio A B Q, il cui diametro sia l'altezza interpo-



sta fra il livello dell'acqua, e l'infimo punto O del canale, e posta R Q eguale all'altezza O G, che conviene all'acqua nel detto infimo punto, si tirino le orizzontali Q I, R H, segate da qualsivoglia corda A B ne' punti H I, e tirata l'orizzontale B M, si alzi M E eguale ad H I, parallela ad O G: sarà il punto E nella superficie ricercata; e così potranno determinarsi tutti i punti di essa; imperocchè debbe essere O G ad M E, come la velocità in M alla velocità in O, cioè in sudduplicata ragione dell'altezze C A, A Q, ovvero come B A ad A Q, o pure come C A ad A B, che è la stessa di R Q ad H I; dunque essendo O G eguale ad R Q, sarà M E eguale ad H I. Il che ec.

Corollario.

Quando M O è una linea retta, la E G diventa un iperbola del secondo grado, essendo il quadrato Q A al quadrato A B, cioè il quadrato M E al quadrato O G, come Q A ad A C, ovvero O F ad F M.

SCOLIO.

Tanto in questa, che nell'antecedenti proposizioni si dovrebbero in rigore assumere le sezioni O G, M E perpendicolari alla linea del fondo N M O, cui si può supporre parallela la direzione del corso dell'acqua; Ma essendo vero generalmente, che per tutte le sezioni tra di loro parallele dee sgorgare in pari tempo eguale quantità d'acqua [non dipendendo la dimostrazione della prop. 1. del libro primo dell'essere le sezioni perpendicolari al corso de' fiumi] e conseguentemente essendo elleno sempre reciproche alle loro velocità, si è stimato bene di lasciare queste proposizioni ne' termini universali, in cui stanno: essendo poi in libertà de' Leggitori il ridurle, come più le parrà opportuno, a sezioni perpendicolari alla direzione del moto dell'acqua, osservando la stessa costruzione.

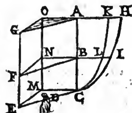
CA-

CAPITOLO IV.

Del tempo, in cui qualsivoglia vaso, o ricettacolo d'acqua si va votando, non essendogliene frattanto somministrata altra copia.

PROPOSIZIONE XXI.

Votandosi il vaso, o ricettacolo A C E G O per l' apertura D posta nel fondo, o vicino ad esso, determinare la scala delle velocità, con cui la superficie suprema dell' acqua va discendendo dentro del vaso, ed accostandosi al fondo.



Sia A C l'altezza dell'acqua nel vaso pieno, e colla cima C, ed asse C A descrivasi con qualunque lato retto la parabola C I H; e come la superficie dell' acqua A G O sta all'apertura D, così stia H A ad A K. Similmente segando altrove il medesimo vaso con un piano parallelo ad A G O, che sia B N F, come B N F all' apertura D, così stia I B a B L, e così sempre. Dico che la curva K L C è la scala delle velocità, con cui scende la superficie dell' acqua dentro il vaso; Imperocchè quando l'acqua è nell' altezza A C, la velocità, con cui esce dall'apertura, D è come l'ordinata H A della parabola; e quando l' acqua arriva solamente all' altezza B C, la velocità con cui esce dal foro D, è come l'ordinata B I, essendo le dette velocità in sudduplicata ragione dell'altezze, di maniera che ciascuna ordinata della parabola esprime quel grado di velocità, che compete all' acqua nell' apertura D, quando il livello dentro il vaso giugne all' altezza corrispondente alla detta ordinata; ma perchè tant' acqua scende dall' apertura D, quanta si muove discendendo dentro il vaso da un livello più alto ad uno più basso (essendo appunto tanto il calo dell'acqua dentro il vaso, quanta è la quantità, che di mano in mano esce dal foro) bisogna che la velocità dell'acqua nell'apertura D stia alla velocità della superficie A O G che discende, come reciprocamente la stessa superficie A O G all'apertura D; adunque essendo la velocità H A alla velocità A K, come A O G al lume D. sarà A K la velocità competente alla superficie A O G; similmente essendo la velocità del lume D, quando l'acqua ha il suo livello in B, l'ordinata I B, la quale sta a B L, come la soperficie, o sezione dell' acqua nel vaso B N F al lume D, sarà B L la velocità della soperficie dell'

dell'acqua, quando si trova giunta in B, essendo discesa dall'altezza A B; e così sempre: dunque la curva K L C determina la scala della velocità, con cui scende la superficie dell'acqua dentro il vaso, mentre si va votando per l'apertura D. Il che ec.

Corollario I.

Si noti, essersi provato, che l'ordinate della parabola H I C A espongono le velocità competenti all'acqua nell'uscire dall'apertura D in quegli instanti, ne' quali l'acqua giogne all'altezze di mano in mano tagliate dalle dette ordinate; di maniera che l'acqua esce dal lume D con moto ritardato, facendosi sempre minore la sua velocità, secondo che va calando l'altezza dell'acqua nel vaso.

Corollario II.

Se il vaso, o ricettaccolo A C E G O o cilindrico, o prismatico, di maniera che tutte le sue sezioni A O G, B N F siano eguali, averanno sempre la stessa proporzione alla sezione del lume D; onde H A ad A K, ed I B a B L staranno nella stessa proporzione, e però la scala delle velocità della superficie dell'acqua, cioè la curva K L C sarà una parabola anch'essa, e la detta superficie dell'acqua discenderà dentro il vaso con moto ritardato; diminuendosi la sua velocità, come ne' gravi tirati allo in sù.

PROPOSIZIONE XXII.

Le velocità A K, B L, colle quali discende la superficie dell'acqua in A, ed in B sono in ragione composta della sudduplicata dell'altezze A C, B C, e della reciproca delle sezione B N F, A O G.

Imperocchè A K a B L è in ragione composta di A K ad A H (cioè della sezione del lume D alla superficie A O G) di A H a B I (che è la sudduplicata dell'altezze A C, C B) e di B I a B L (cioè della sezione B N F all'apertura D; ma la prima, e la terza ragione formano quella di B N F ad A O G; dunque A K a B L è in ragione composta della sudduplicata dell'altezze A C, B C, e della reciproca delle sezioni B N F, A O G. Il che ec.

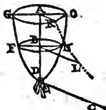
Corollario I.

Se le sezioni fussero in ragione sudduplicata dell'altezze, come se fusse il vaso un prisma parabolico, i cui piani verticali opposti fussero due eguali parabole A H C; sicchè le sezioni fussero rettangoli compresi dell'ordinata A H, B I della parabola, e da una costante, la ragione composta della sudduplicata dell'altezze, e della reciproca delle sezioni, sarebbe ragione di egualità; di maniera che la curva K L C diverrebbe una retta parallela ad A C, e la superficie dell'acqua discenderebbe con moto equabile verso il fondo.

Co-

Corollario II.

Lo stesso accaderebbe, quando il vaso fusse un solido rotondo nato da una parabola G F C del quarto grado, rivolta intorno l'asse A C; imperocchè, essendo la quarta potestà di A G alla quarta potestà di B F, come A C a B C, ancora dimezzando l'una, e l' altra ragione, sarà il quadrato A G al quadrato B F, ovvero il cerchio O G al cerchio N F, in sudduplicata ragione di A C a C B, e però secondo il corollario precedente la superficie O G dee discendere equabilmente nel votarsi il vaso O C G.

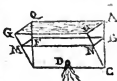


Corollario III.

Ma se il vaso medesimo O C G fusse generato dalla parabola ordinaria, scenderebbe in esso la superficie dell' acqua con moto accelerato (come accennò senza dimostrazione il Torricelli nel fine del suo Trattato del moto dell'acque) perchè la velocità in A alla velocità in B sarebbe in ragione composta di A G a B F, e del quadrato B F al quadrato A G, cioè sarebbe reciprocamente, come B F ad A G, e però scendendo da A in B diventerebbe maggiore; e la scala della velocità sarebbe un iperbole quadratica K L, in cui il quadrato A K al quadrato B L starebbe reciprocamente, come B C a C A.

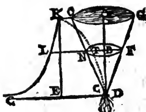
Corollario IV.

Nel prisma triangolare A O C P G Q per essere il triangolo A C O analogo alla conoide parabolica O C G, (*fig. antecid.*) accade il medesimo; ed in fatti la sezione A O G Q alla sezione B N M F sta come A O a B N, cioè come A C a C B, o come il cerchio O G della conoide parabolica (*fig. anteced.*) al cerchio N F, e però la velocità, con cui scende la superficie del detto prisma triangolare posto col taglio C P all' ingiù, cresce come nel conoide parabolico, secondo la scala dell' iperbole quadratica K L.



Corollario V.

Essendo il vaso G C O un cono, ovvero una piramide colla punta all' ingiù, da cui per l'apertura D esca l'acqua, la scala della velocità sarà una



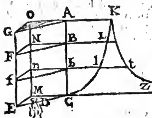
una iperbole cubica del second' ordine; imperocchè alla ragione sudduplicata di A C ad A B aggiungendo la reciproca delle sezioni circolari F N, G O, che è la duplicata di C B ad A C, si fa la velocità A K alla velocità B L in ragione della radice quadra del cubo B C alla radice quadra del cubo A C; e quadrando sarà il quadrato A K al quadrato B L, come il cubo B C al cubo A C.

SCOLIO.

In simigliante maniera si troverà la scala della velocità della superficie dell'acqua discendente per qualunque sorta di vaso, senza che soverchiamente ci dilunghiamo ad esaminarle tutte.

PROPOSIZIONE XXIII.

Descrivere la curva K T Z esprimente i tempi della scala della superficie dell' acqua nel vaso A O G E, cioè la scala de' tempi elementari.



Si descriva prima la curva K L C, che è la scala delle velocità, con cui scende la superficie dell' acqua, come di sopra si è insegnato: indi si faccia, come la velocità L B alla velocità A K, così A K a B T: saranno dunque l'ordinate B T reciproche delle velocità L B: e per la prop. 4. delle mie Note al Trattato del moto accelerato del Galileo, la curva K T Z sarà la scala de' tempi elementari: di maniera che le sue ordinate B T saranno come i minimi tempi impiegati dalla superficie dell' acqua nello scendere per una particella infinitamente piccola della sua altezza; e tutta l'area A K Z C alla parte A K T B starà come il tempo, in cui scende la detta superficie per tutta l' altezza A C, al tempo, in cui scende per A B; il che ec.

Corollario I.

Essendo ne' vasi cilindri, e prismatici la scala delle velocità una parabola K L C, per lo coroll. 2. della prop. 21. la sua reciproca K T Z sarà un iperbole quadratica, in cui il quadrato B T al quadrato K A sta come A C a B C, essendo questa in tale caso la ragione del quadrato A K al quadrato B L.

Co-

Corollario II.

Viceversa essendo il vaso una conoide parabolica ordinario O C G (*fig. del coroll.* 2. *prop.* 22) perchè la scala delle velocità K L è una iperbole quadratica, come si è dimostrato nel Coroll. 3. della precedente (e lo stesso dicasi del prisma triangolare voltato col taglio all'ingiù, come nella (*fig. del coroll.* 4. *prop.* 22.) si è provato al Coroll. 4.) la sua reciproca, cioè la scala de' tempi elementari sarà una parabola, di maniera che i tempi suddetti saranno come i raggi, o come li diametri delle sezioni di detta conoide parabolica, per le quali di mano in mano passa la superficie suprema dell'acqua, secondo che si và abbassando.

Corollario III.

E perchè si è veduto nel Coroll. 5. della precedente, che la scala della velocità nel vaso a cono G C O (*fig. del coroll.* 5 *prop.* 22.) (o di una piramide voltata colla punta allo in giù) è l' iperbole cubica del second' ordine, averemo per sua reciproca la parabola K T C parimente cubica dello stesso ordine, in cui sarà il quadrato B T al quadrato A K, come il cubo A C al cubo B C; e questa sarà la sua scala de' tempi elementari.

Corollario IV.

Generalmente la curva A K T (*fig di questa prop.* 23.) scala de' tempi elementari averà le ordinate A K, B T in ragione composta della diretta delle sezioni A O G, B N F del vaso, e della reciproca sudduplicata di B C ad A C: siccome la scala delle velocità K L C, che le è reciproca per la Prop. 22. ha le ordinate in ragione composta della diretta sudduplicata delle altezze A C, B C, e della reciproca delle sezioni B N F, A O G.

Corollario V.

Onde ancora (per le cose dette nella dimostrazione della Prop. 6. del lib. 1.) la ragione delle sezioni A O G, B N F del vaso sarà composta di quella de' tempi elementari A K, B T, e della sudduplicata di A C a B C, cioè delle velocità che ha l'acqua nell'uscire dal lume nell' altezze A C, B C, cioè, supposto, che C L K sia una parabola esprimente le dette velocità, sarà A O G a B N F, come il quadrato A K al rettangolo T B L.

Corollario VI.

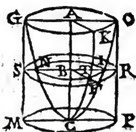
Che però, se le sezioni del vaso decrescono, o si ampliano andando verso il fondo C secondo qualunque ragione diretta, o reciproca delle distanze A C, B C, moltiplicata, o summoltiplicata secondo l' esponente *m*, toltone da esso un mezzo, che è l'esponente delle ordinate della pa-

ra-

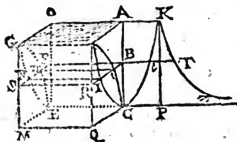
rabola, sarà il resto l'esponente dell'ordinate nella scala de' tempi elementari.

PROPOSIZIONE XXIV.

Benchè la conoide O C G generata dalla parabola del quarto grado sia due terzi del cilindro circoscritto O P M G: siccome ancora il prisma parabolico ordinario H C A O E G sia due terzi del prisma rettangolo circoscritto H Q M E O A; tuttavolta impiegherà la detta conoide a votarsi per una eguale apertura la metà del tempo, che vi impiega il cilindro; e così il prisma parabolico rispetto al prisma rettangolo.



Ciò è manifesto dal Coroll. 1. della precedente, in cui si è veduto, essere la scala de' tempi d' un cilindro, o d' un prisma lo spazio dell' iperbole quadratica A K T Z C, il quale è duplo dell' iscritto rettangolo K A C P; il quale sarebbe la scala de' tempi del moto equabile competente al moto della superficie dell' acqua sì nella conoide parabolica del quarto grado, come nel prisma parabolico ordinario, per li Coroll. 1. e 2. della Prop. 22, essendo adunque l'aree de' tempi elementari, come i tempi di tutto il moto della superficie dell'acqua contenuta in questi vasi per tutta l' altezza A C, nel quale tempo votasi tutto il vaso, sarà il tempo, in cui si vota il cilindro duplo del tempo, in cui si vota la conoide parabolica del quarto grado; ed il tempo, in cui si vota il prisma rettangolo, altresì duplo del tempo, in cui si vota il prisma parabolico; e pure il primo non è di capacità duplo del secondo, ma sesquialtero, siccome ancora il terzo del quarto. Il che ec.



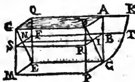
Corollario.

Dunque una conoide parabolica del quarto grado, ed un prisma parabolico ordinario, si votano più presto in proporzione della capacità loro, che non fa il cilindro, ed il prisma rettangolo; perchè a ragione dell' acqua in essi contenuta, se questi si votano in sei minuti di tempo, dovrebbero quelli, che contengono solo due terzi di acqua, esaurirsi in 4. minuti; ma si esauriscono in 3. soli minuti, come si è veduto.

PROPOSIZIONE XXV.

Il tempo, in cui si vota una conoide parabolica ordinaria O C G al tempo, in cui si esaurisce per una simile, ed uguale apertura il cilindro circoscritto, è in ragione suttripla; e lo stesso accade di un prisma triangolare voltato col taglio all'ingiù, e pa-

e paragonato al prisma rettangolo, che lo circoscrive; quantunque la ragione della capacità de' solidi in amendue i casi sia suddupla.



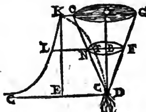
Perchè la scala de' tempi tanto della conoide parabolica ordinaria, che del prisma triangolare, è la parabola K T C, per lo Coroll. 2. della Prop. 23. ma questa è due terzi del rettangolo circoscritto, e conseguentemente un terzo dell'iperbole quadratica dupla di esso rettangolo, la quale iperbole è la scala de' tempi del cilindro, o del prisma rettangolo per lo Corollario 1. della stessa Prop. 23., dunque il tempo, in cui si vota la conoide parabolica ordinaria, è un terzo del tempo, in cui si esaurisce il cilindro circoscritto; e lo stesso vale del prisma triangolare rispetto al parallelepipedo circoscritto: quantunque la ragione de' solidi sia solamente suddupla. Il che ec.

Corollario.

Quì ancora è manifesto, che in proporzione della capacità sua è più breve il tempo, in cui si vota il solido iscritto, che il circoscritto; perchè in proporzione dell'acqua che contiene, dovrebbe vuotarsi nella metà del tempo, e pure si esaurisce solamente in un terzo di quello, che si richiede al solido cilindro, o parallelepipedo.

PROPOSIZIONE XXVI.

Un cono, ovvero una piramide colla punta allo ingiù si esaurisce in un quinto del tempo, in cui si esaurisce il cilindro, ovvero il prisma circoscritto, di cui pure essa piramide, o cono è un terzo di capacità.



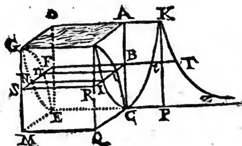
Perchè la parabola conica del secondo ordine A K T C, la quale, per lo Coroll. 3. della Prop. 23. è la scala del tempo del vaso conico, o piramide, e due quinti del circoscritto parallelogrammo K A C E, e questo è la metà della iperbole quadratica A K L C, che è la scala de' tempi del vaso cilindrico, o prismatico circoscritto; dunque la scala de' tempi del cono, o piramide è un quinto della scala de' tempi del cilindro, o prisma circoscritto; e conseguentemente si vota il cono nella quinta parte del tempo, in cui si vota il cilindro, e lo stesso vale di qualunque piramide rispetto al prisma, che la circoscrive, e di cui tanto l' uno, che l' altro solido è un terzo di capacità; come è noto a' Geometri.

Co-

Corollario I.

Quì ancora si vede, che più presto si esaurisce il cono, o la piramide, che il cilindro o prisma circoscritto, in riguardo alla sua capacità, perchè attesa questa, dovrebbe votarsi in una terza parte del tempo, in cui si esaurisce il solido circoscritto, e pure vi consuma solamente un quinto del medesimo tempo.

Corollario II.



Lo stesso vale di un prisma fatto dal trilineo parabolico A C I H le cui ordinate, e conseguentemente le sezioni del prisma, sono come i quadrati dell'altezze, onde è analogo al cono, e alla piramide.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se il prisma A H I C E N G O è fatto dalla parabola H I C A di qualsivoglia grado, in cui le ordinate H A, I B sieno in ragione tanto multiplicata, o summultiplicata di quella dell' altezze A C, B C, quanto il numero m *intiero, o rotto, è moltiplice, o summultiplice dell' unità: il tempo, in cui dovrà votarsi, starà al tempo, in cui si voterebbe il prisma rettangolo circoscritto, come l' unità al complesso della stessa unità, e del duplo numero suddetto* m. *cioè come* 1. *a* 2. m + 1.

Sia A K T Z C la scala del tempo del prisma rettangolo A H Q M E G, e dell'iscritto prisma parabolico H I C E N G O A sia la scala la figura A K I C; sarà dunque A K a B *t* in ragione composta della diretta delle sezioni A H G O, B I N F, cioè dell' ordinata A H all' ordinata B I, che è la multiplicità secondo il numero *m* di quella dell'altezze A C, B I, e della reciproca sudduplicata delle medesime altezze B C, A C, per lo Coroll. 4. della Prop. 23. vale a dire, che A K a B *t* sarà in ragione tanto moltiplicata, o summultiplicata di quella delle altezze A C, B C, quanto il numero *m*, detrattone la metà dell' unità, resta moltiplice, o summoltiplice della stessa unità: onde per le cose dimostrate da noi negli Ugeniani cap. 8. n. 10. sarà la figura A K *t* C al suo compimento K *t* C P, come 1 ad *m* detrattone un mezzo; e componendo, e per conversione di ragione, sarà il rettangolo A K P C alla figura A K *t* C, come *m* con un mezzo, all'unità; ma essendo l'iperbola quadratica A K T Z C dupla dell'iscritto rettangolo A K P C, sarà quella a questo, come 2 *m*, colla giunta d'una unità, ad *m* con un mezzo; dunque per l'ugualità ordinata, sarà la detta area iperbolica alla figura A K t C, cioè il tempo che mette a votarsi il prisma rettangolo, al tempo in cui si esaurisce il prisma parabolico, come 2 *m* colla giunta dell' unità alla stessa unità; e convertendo è manifesto ciò, che si era proposto a dimostrare.

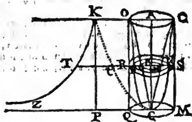
Co-

Corollario.

Quindi si può fare un prisma parabolico, il tempo di cui sta al tempo del parallelepipedo circoscritto, quanto al votarsi, in qualunque ragione di minore inegualità. Si voglia per esempio, che il tempo, in cui si esaurisce quello, al tempo, in cui si esaurirebbe questo, stia come 1. a 25. sarà dunque 25. eguale a 2. *m* + 1. e però 12 eguale a *m*; sicchè si scelga tale parabola, o trilineo parabolico A C I H, che l'ordinata A H all' ordinata B *i* stia, come la duodecima potestà di A C ad una simile potestà di B C, ed il prisma A H *i* C E *n* G O soddisfarà al quesito, essendo però la sua capacità una decimaterza parte del parallelepipedo circoscritto.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Se il solido rotondo G N C J O è fatto dalla parabola G N C A, in cui le ordinate G A, N B siene in ragione tante moltiplicata, o summoltiplicata di quella dell' altezze A C, B C, quanto il numero m è moltiplice, o summoltiplice dell' unità; sarà il tempo, in cui detto solido può votarsi, a quello in cui si esaurirebbe il cilindro circoscritto G M Q O, come l'unità al quadruplo del numero m congiunto coll' unità, cioè, come 1. a 4. m + 1.



Perchè posta l' area A K *t* C per la scala de' tempi elementari della proposta conoide, sarà A K a B *t* in ragione composta del cerchio G O al cerchio N *l*, cioè della duplicata di A O a B *l*, che sarebbe moltiplicata di quella dell' altezze A C, B C secondo il doppio del numero *m*, e della suddupplicata reciproca delle altezze B C, A C, onde A K a B *t*, è come la potestà dell' altezza A C denominata dal duplo del numero *m*, detrattone il mezzo dell' unità, ad una simile potestà dell' altezza B C; però l'area A K *t* C sarà al rettangolo circoscritto A K P C, come l'unità al duplo numero *m*, congiuntovi un mezzo; ma il rettangolo suddetto è allo spazio dell' iperbola quadratica A K T Z C in ragione suddupla; cioè, come il duplo numero *m*, con la giunta d' un mezzo, al quadruplo del numero *m*, congiuntavi l' unità; dunque per l'egual proporzione, l'area A K *t* C, che è la scala de' tempi del conoide, stà all'area A K T Z C, che è la scala de' tempi del cilindro circoscritto, come 1. a 4. *m* + 1. Il che ec.

Corollario I.

Si può quindi cavare il metodo di fare un conoide parabolico, il quale si voti in tempo, che stia al tempo, in cui si vota il cilindro circoscritto, in una data ragione. Per esempio, sia la ragione di 1. a 25.; dunque sarà 25. eguale a 4 m + 1., e però m eguale a 6.; sicchè fatta la parabola, le cui ordinate siano, come le seste potestà dell'altezze, questa generando un conoide suddisfarà al problema.

Corollario II.

Si avverta che queste due ultime proposizioni comprendono generalmente le proposizioni 24. 25. 26., e loro corollarj.

SCOLIO.

Non occorre più oltre dilungarsi in questa materia, sì perchè il medesimo metodo potrà agevolmente da' Lettori applicarsi ad altre figure; e sì perchè negli opuscoli postumi del Signor Dottore Vittorio Francesco Stancari si può vedere dimostrato analiticamente nel Trattato 5. quanto può desiderarsi in questo argomento; da cui ancora è insegnata la proporzione del tempo, in cui si esaurisce un vaso posto per un verso, a quello che si richiede ad esaurire il medesimo, essendo posto in un altro sito: come che il tempo, in cui si vota un vaso conico, o piramidale posto colla punta allo ingiù, a quello, in cui si voterebbe posto all'ingiù colla base, sta come 3. ad 8.; che un vaso emisferico, posto colla cima in giù, si vota in un tempo, il quale al tempo in cui si voterebbe essendo posto colla cima in su, sta come 7. a 12., e così d'altri simili.

CA-

CAPITOLO V.

Applicazione della dottrina fin ora esposta, al corso dell' acqua negli alvei de' fiumi notabilmente inclinati all' orizzonte.

POtrà parere, che tutto il detto fin ora dell'acqua, la quale esce da' vasi, corrisponda poco a ciò, che si è promesso di trattare in questo secondo Libro de' fiumi, che hanno l'alveo inclinato; ma se si farà riflessione, che i canali, per cui si tramanda l'acqua derivata dalle vasche, sono similissimi a' fiumi suddetti, non sembrerà essere stata inutile la nostra digressione, nè del tutto disadatta al proposito, di cui trattiamo. Imperocchè non vi ha fiume, che non iscenda, o da un lago, o da una fonte, o da qualche chiusa, o sostegno, e allora l'acqua raccolta nel ricettacolo della fonte, del lago, o dell'alveo superiore alla chiusa, è come se fusse raccolta in un vaso; e l'acqua, che scorre nell'alveo susseguente, per l'emissario del lago, pel labbro della fonte, o per la cresta della chiusa scendendo, corrisponde a quella, che per le docce applicate a qualche vaso, si va derivando da un luogo ad un altro, e però tutto quello, che fin ora si è detto di questi canali, può benissimo applicarsi a' fiumi; de' quali per tanto potrà asserirsi, in vigore delle cose dimostrate di sopra, e che le velocità loro siano in sudduplicata ragione dell' altezze, da cui sono discesi; e che si può determinare assolutamente (e non solo supporla *ex hypotesi*, come si è fatto nel primo libro) la velocità media, e ragguagliata di qualunque sezione, data la discesa di esso fiume dalla sua origine, e che può descriversi la figura della loro superficie, la quale per lo più è diversa, secondo la diversità della figura del fondo, sopra di cui varj fiumi, e diverse parti del medesimo si veggono scorrere; e che in diversi tempi si riducono dalla ripienezza all'estrema loro magrezza, scaricando l'acqua ricevuta da' loro emissarj, secondo la diversa figura, e capacità de' medesimi; e così vadasi discorrendo dell' altre particolarità, delle quali si è trattato di sopra, come in piccolo, nell' applicarle a' vasi, ed a' canali, che ne derivano l'acqua, ed egualmente possono adattarsi in grande alla materia del corso de' fiumi; la quale applicazione lascerò che più minutamente si faccia da' miei leggitori, bastando che io ne dia l'esempio solamente in una, o due cose, proseguendo poscia a discorrere di varie altre circostanze degli alvei de' fiumi inclinati all' orizzonte, degnissime da sapersi, per poterci regolare, nel maneggio dell'acque correnti, colle dovute cautele.

PROPOSIZIONE XXIX.

Dato l'alveo del fiume H G, l'origine di cui venga dall'altezza A, determinare la sua velocità in qualsivoglia sezione D G, ed in ogni punto di essa.

Dagli estremi G, D. della data sezione D G, e da qualsivoglia suo punto di mezzo F si tirino le orizzontali G O, D M, F N, segate in L, I, K dalla perpendicolare A L tiratavi sopra dell' origine del fiume A; ed essendo descritta, colla cima A, sopra l' asse A L una parabola A M O, rimangano dal contorno di essa intercette le porzioni delle dette orizzontali L O, I M; K N, queste saranno le velocità competenti al fiume ne' punti respettivi G, D, F. Imperocchè le suddette velocità sono in suddupplicata ragione delle altezze, da cui l' acqua è discesa, secondo le dottrine sopra poste: onde essendo caduta l' acqua dall' origine A (dove sia la fonte, o l' emissario del lago, ovvero la cresta di qualche sostegno, sopra di cui l'acqua si sparga orizzontalmente) è chiaro, che la velocità in G alla velocità in F sarà come O L ad N K; e questa alla velocità in D, come N K ad M I, essendo l' ordinate della parabola O L, N K, M I in suddupplicata ragione delle corrispondenti altezze A L, A K, A I. Il che ec.

Corollario I.

Quindi è chiaro, essere il tronco parabolico M I L O la scala delle velocità della sezione D G.

Corollario II.

E la velocità media di essa sezione ritrovarsi in tale punto F, a cui corrisponde l'ordinata K N media aritmetica del suddetto trapezio parabolico I M O L, da trovarsi, come si è insegnato nella prop. 4.

Corollario III.

Se il fondo dell'alveo, in vece di essere H G, fusse stato R S, si sarebbe trovata per lo punto S la medesima velocità L O, che per lo punto G: e per lo punto R la stessa velocità I M, che per lo punto D; onde si vede, che le velocità dell' acqua corrente per se stesse non dipendono dalla pendenza dell' alveo, ma bensì dalla caduta dalla sua origine A, la quale essendo la stessa, ne risulta nell'acqua ancora la medesima velocità. Solamente la pendenza maggiore dell' alveo fa, che più presto si scarichi, e smal-

e smaltisca la quantità dell'acqua, che in esso si contiene per essere più breve tratto di viaggio la R S, che la H G compresa tra le medesime orizzontali M D, O G, nelle quali si esercita la medesima scala di velocità M I L O, onde accade, che in più breve tempo si scorre dall' acqua il tratto R S, che il più lungo H G.

Corollario IV.

Le sezioni del medesimo alveo di fiume G D, E C (e conseguentemente ancora le altezze dell'acqua in pari larghezza d'alveo) sono reciprocamente in sudduplicata ragione dell'altezze K A, A L dall' origine A del fiume: o pure sono reciprocamente come le ordinate della parabola K N, L O; imperocchè sono reciproche delle loro velocità.

SCOLIO.

Per lo più non rimangono libere, e vive le velocità corrispondenti alla caduta dell'acqua dall'origine del fiume, per essere raffrenate da tante resistenze incontrate pel viaggio. Ma defalcandone quello, che gl' intoppi precedenti possono avere levato alla primitiva velocità dell'acqua, si può far conto, ch'ella sia caduta da un'altezza tanto minore, che abbia potuto conferirle quel solo grado di velocità, che le rimane, come nella seguente.

PROPOSIZIONE XXX.

Determinare l'altezza, donde cadendo l'acqua si sarebbe acquistata quella velocità, di cui attualmente si trova affetta, non ostanti gl' impedimenti incontrati pel viaggio.

Sia A G l'altezza, da cui realmente è caduta l'acqua D K nell' alveo del fiume D K L G; descritta adunque la parabola A C I G sopra l'altezza A G come asse, dovrebbero le parti dell'acqua nel punto D per esempio, avere tutta la velocità D C; ma per le resistenze incontrate si supponga perduta la parte della velocità C F, sicchè rimanga viva al punto D nell'acqua la sola velocità D F, condotta F M parallela all'asse, ed ordinata M N; la quale sarà eguale ad F D Sarà dunque la velocità dell' acqua in D, quale le competerebbe, se fusse caduta dall'altezza A N; per la qual cosa, posta D E eguale ad A N, e per la cima E, e per lo punto F descritta di nuovo la stessa parabola E F H, si misureranno in questa le velocità D F, G H competenti

 all'

all' acqua, come se l' origine sua fusse in E, non in A: imperocchè in D l'acqua ha un grado di velocità D F eguale al grado M N, che corrisponda all' altezza A N; ovvero E D; e similmente in G ha un grado di velocità G H, che corrisponde all' altezza E G, ed in O la velocità O M corrispondente all' altezza E O; e la scala delle velocità, che senza le resistenze sarebbe stata il parabolico trapezio D C L G, sarà oramai il solo trapezio D F H G per essersi defalcare le porzioni di velocità espresse nel quadrilineo C F H L, che restano assorbite dalle resistenze incontrate nel viaggio, le quali tolgono all' acqua il vantaggio di tutta la caduta A E, di cui vengono scorciate le altezze A D, A G, A O, mentre ridotte sono alle sole E D, E G, E O rispettivamente.

Corollario.

Le velocità in varie parti dell' acqua saranno dunque in sudduplicata ragione delle altezze, non già dell' acqua medesima [altrimenti la sua superficie non avrebbe moto alcuno, per non avere altezza d'acqua sopra di sè; il che apparisce contrario al senso] nè meno dell' origine reale A, se non si prescinde dalle resistenze, dalle quali la velocità viene raffrenata; ma bensì dal punto E, che può dirsi l' origine sua equivalente.

SCOLIO.

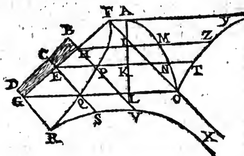
Questa equivalente origine può determinarsi in pratica col metodo insegnato nella prop. 40 del primo libro, o nelle susseguenti, indagando la velocità, che di fatto conviene alla superficie d' un fiume, o ad altra parte più profonda dell' acqua, e paragonandola alla Tavola del Guglielmini, per riconoscere a quale altezza corrisponda. Per esempio, si trovi che l' acqua in superficie corra piedi di Bologna 76 in 12 minuti secondi: che sarebbero 380. in un minuto primo. Cerco nella Tavola del Guglielmini a quale altezza corrisponda questa velocità; e trovo che corrisponde a piedi 3., ed un oncia; dunque sarà questa l' altezza, da cui cadendo l' acqua si è acquistata questa velocità; onde presa D E eguale a piedi 3. once una di Bologna, descrivo pel punto E, come cima dell' asse E D, la parabola E F H, ed averò la scala delle velocità del fiume D G L K da me esaminato; e così non mettendomi in pensiero di avere l' altezza della vera fonte, o della cresta dell' ultima chiusa, da cui l' acqua è caduta, mi basterà avere l' origine equivalente, somministratami dalla sperienza nel punto E.

Nè dia noia ad alcuno la specie della misura de' piedi Bolognesi, a cui è legata la Tavola del Guglielmini, potendosi facilmente ragguagliare a qualsivoglia altra nota misura, per esempio al piede regio di Parigi, come si è fatto nello scolio della prop. 10. dove fu detto, che il piede suddetto Parigino uguaglia once 10 e un quarto del piede di Bologna. Al braccio Fiorentino, che importa un piede e mezzo, e un quarto d' oncia del piede Bolognese. Al piede del Reno, che trovasi eguale ad once 9¼ e cinque sesti del piede di Bologna; e così degli altri. Onde se, a cagione di esempio, che si troverà, l' acqua d' un fiume in 12 minuti secondi passi 36 braccia Fiorentine, essendo queste eguali a piedi di Bologna 54, e once 9, si troverà, che in un minuto primo passerebbe piedi Bolognesi 273, once 9.

ce 9., a' quali nella suddetta Tavola corrisponde un altezza un poco maggiore di un piede, e 7. once: che sarà circa un braccio, e un soldo Fiorentino.

PROPOSIZIONE XXXI.

Dato un tratto di un fiume, o canale H B D G, ritrovare la scala delle sue velocità.



Sia l'origine, o equivalente del fiume il punto A, e tirate le orizzontali H M, G O, tagliate dalla perpendicolare A L ne' punti L, I, si descriva per la cima A sopra l' asse A L la parabola A M O, è manifesto, che le velocità convenienti all' acqua ne' punti H, E, G sarebbero le ordinate I M, K N, L O; di maniera che, se l'acqua scorresse per la perpendicolare I L, sarebbe il trapezio parabolico I M O L la scala delle sue velocità; ma andando per l' inclinata H G, bisognerà applicare le medesime ordinate perpendicolarmente alla stessa H G ne' punti H, E, G, come sarebbero le H P, E Q, G R, eguali rispettivamente alle medesime I M, K N, O L, e così dell'altre intermedie; ed allora il quadrilineo H P R G sarà la vera scala di velocità dell'acqua, che scorre per la linea H E G (intendendo sempre delle medie velocità, che sono in qualunque sezione H B, E C, G D, applicate alla detta linea H E G, che può intendersi passare per lo centro di velocità di ciascuna sezione) dunque stesa la linea G H fino all'orizzontale A F, che passa per la reale, o equivalente origine del fiume A, e descrivendo all' asse F G una parabola F P R, il cui lato retto stia al lato retto dell'altra A M O, come reciprocamente sta il perpendicolo I L all' inclinato piano H G; o come A I ad F H; sarà questa che passerà per li punti P, Q, R come sopra determinati, perchè essendo come A I ad F H, ovvero A K ad F E, o pure A L ad F G, così il lato retto della parabola F P R al lato retto dell' altra A M O, sarà il rettangolo di A I nel lato retto della parabola A M O, eguale al rettangolo di F H nel lato retto della parabola F P R, e conseguentemente il quadrato I M eguale al quadrato P H. Similmente si dimostrerà, essere il quadrato K N eguale al quadrato E Q, ed il quadrato L O eguale al quadrato G R, per essere i rettangoli di A K nel suo lato retto, e di A L nel medesimo, eguali rispettivamente a' rettangoli di F E nel lato retto dell' altra parabola, e di F G nello stesso; pertanto il trapezio parabolico H P R G è la scala delle velocità del corso dell' acqua per lo tratto H G del canale H B D G; il che ec.

PROPOSIZIONE XXXII.

Poste le stesse cose, trovare la scala de' tempi elementari del corso dell' acqua per lo medesimo tratto di fiume H G.

Tirata F X perpendicolare ad F G, si faccia per lo punto R, fra gli asintoti G F, F X una iperbole quadratica, sicchè sia il quadrato R G al quadrato E S, come E F ad F G, cioè come il quadrato Q E al quadrato G R; è manifesto, essere le ordinate V H, E S, reciproche alle Q E, P H essendo tanto il rettangolo V H P, quanto l'altro S E Q eguali allo stesso quadrato R G, on e essendo ancora i tempi elementari reciprochi delle velocità, espresse dall' ordinate Q E, P H della parabola, saranno le ordinate V H, E S dello spazio iperbolico quadratico H V S R G proporzionali a' tempi elementari; e però il suddetto spazio iperbolico sarà la scala, che richiedevasi.

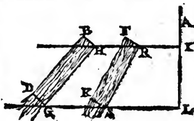
Corollario.

Se si descrive similmente fra gli asintoti L A, A Y per lo punto O l' iperbole quadratica O T Z, sarà il quadrilineo Z T O L I la scala de' tempi elementari della stessa acqua, se dall' orizzontale H I cadesse a piombo per la direzione I L sopra il piano orizzontale L G; onde il tempo, che spende l'acqua a muoversi pel canale inclinato H G, al tempo che ci averebbe impiegato, cadendo perpendicolarmente da un piano orizzontale all' altro, sarà come lo spazio V H G R allo spazio Z I L O, cioè come H G, I L, perchè tutte le ordinate dell' uno, e dell' altro essendo eguali, e s amente applicate a gli assi diversi H G, I L, ed alle parti loro propor. z onali H K, I K; E G, K L, sono gli spazj parabolici suddetti, come gli assi medesimi H G, I L, come dimostrai nella prop. L. della mia appendice delle volte coniche a' Problemi Viviani.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Il tempo, che mette l' acqua a scorrere il canale H G, a quello che mette nello scorrere un altro canale R S inclinato fra le medesime orizzontali, e dipendente d 'la medesima origine A, sta come la lunghezza H G alla lunghezza R S:

Il tempo, che mette l' acqua a scorrere il canale H G a quello, in cui scorrerebbe il perpendicolo I L interposto fra gli stessi piani orizzontali I H, L G, per lo corollario della precedente, sta come H G ad I L, similmente il tempo, in cui si scorrerebbe il perpendicolo I L, sta a quello in cui si scorrerebbe il canale R S, come I L ad R S; dunque per l' egualità ordinata, il tempo,



in cui

in cui si scorre il canale H G, a quello in cui si scorre dall' acqua stessa, dipendente dalla medesima origine A, il canale R S egualmente alto fra gli stessi piani orizzontali, è come H G ad R S; il che ec.

Corollario.

Ancora la quantità d' acqua H B D G, che si muove per l' alveo H G, alla quantità R F S K, che scorrerebbe per l' alveo R S, (supposto che uguale copia fusse introdotta per la sezione H B, che per la R F, ed affetta della velocità, che gli compete, per la caduta dalla reale, ò equivalente origine A) starà come H G ad R S; imperocchè nel tempo, che mette l' acqua a venire da H in G, si riempie l' alveo H G, e nel tempo, che mette l' acqua a venire da R in S, si riempie l' alveo R S, per la continua successione delle parti dell' acqua; sicchè quante minime particelle di tempo si contano nel tempo della scesa per H G, tante altresì particelle eguali d' acqua saranno passate per la sezione H B, e quante minime particelle della stessa estensione di tempo si contano nel tempo della scesa per R S, tante particelle d' acqua tra di loro eguali, ed eguali altresì alle introdotte per l' altro canale, saranno passate per la sezione R F; dunque la quantità dell' acqua contenuta in H G, e corrente per esso canale (quanta cioè rimarrebbe intercetta da due cateratte che nello stesso istante scendessero in H, e in G a chiudere il canale) alla quantità d' acqua similmente contenuta nell' alveo R S, sta come il tempo speso dall' acqua a venire da H in G, a quello che spenderebbe a venire da R in S, cioè, come la lunghezza H G alla lunghezza R S.

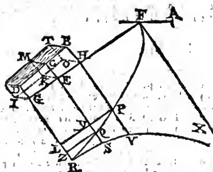
SCOLIO.

Questo corollario si fonda su questo principio, che le quantità d' acqua sieno come i tempi: il quale se da alcuno forse parrà troppo debolmente provato, resterà con maggiore rigore stabilito nella seguente proposizione che dimostrerà lo stesso ancora in varie parti del medesimo canale.

PROPOSIZIONE XXXIV.

L' acqua contenuta nell' alveo O H B G N, all' acqua contenuta in qualunque sua parte O H B E M, sta come il tempo impiegato dall' acqua a venire da H in G, al tempo speso nel venire da H in E.

Sia P H G R la scala delle velocità, e sia H V R G la scala de' tempi elementari, che le è reciproca: già la sezione O T B H alla sezione M C E K è reciprocamente, come E Q a P H, che sono le loro medie velocità; ma ancora i tempi elementari H V, E S sono reciprochi alle medesime velocità E Q, P H; dunque la sezione O T B H alla sezione M C E K sta come il tempo elementare H V al tempo elementare E S; e così sempre; dunque tutte le sezioni, che compongono il corpo d' acqua O H B G N, a tutte le sezioni componenti il corpo d' acqua O H B E M, stanno come tutte l' ordinate dell' area H G R V, a tutte l' ordinate dell' area H E S V; e però la quantità d' acqua, che riempie il canale H G, a quella che riempie il canale H E, sta come la figura V H G R alla figura V H E S,



H E S, cioè come il tempo speso dall' acqua in venire da H in G, allo speso nel venire da H in E; il che ec.

Corollario I.

La quantità d' acqua compresa in un canale dalla sua origine A F, fino ad un termine G I, alla quantità racchiusa nel medesimo fra la stessa origine, e qualunque altro termine E K, è in sudduplicata ragione dell' altezze G F, F E, o pure come le ordinate della parabola G R, E Q, cioè come le velocità acquistate ne' medesimi termini G I, E K, le quali si esprimono dalle medesime ordinate; imperocchè la prima quantità alla seconda è come il tempo impiegato da F in G, al tempo impiegato da F in E; e questi tempi sono come le velocità, cioè in sudduplicata ragione dell' altezze, da cui l' acqua è caduta; o pure dicasi così: il tempo per F G al tempo per F E, e come l' area F G R V X, all' area F E S V X, che sono le scale de' tempi; ma la prima area è dupla del rettangolo F G R, la seconda dupla del rettangolo F E S, e però sono come detti rettangoli, cioè in ragione composta di F G ad F E, e di R G ad S E, la prima delle quali ragioni è quella del quadrato G R al quadrato E Q, la seconda è la medesima che di Q E ad R G, o del quadrato E Q al rettangolo di E Q in R G; dunque la scala de' tempi F G R V X alla scala F E S V X, sta come il quadrato G R al rettangolo di Q E in R G, cioè come G R ad E Q, che sono le ordinate della parabola, e però in sudduplicata ragione delle lunghezze G F, E F, dalle quali l' acqua è caduta.

Corollario II.

Ma il tempo per tutto il tratto H G [dopo la caduta F H] al tempo per la porzione sua H E [condotta P L parallela all' asse della parabola] sarà come L R a Q Y; di maniera che il trilineo parabolico R P L può servire di scala de' tempi totali per li tratti d' alveo, che sono dal punto H in giù; perchè essendo il tempo per F G, come G R, ed il tempo per F E, come Q E, ed il tempo per F H, come H P; è chiaro, che il tempo residuo per H G sarà L R, e per H E sarà Q Y, e per E G sarà R Z ec.

Co-

Corollario III.

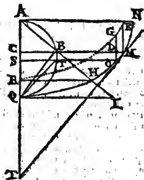
La quantità d'acqua racchiusa ne' tratti H B E K M, H B D G N, essendo come i tempi, saranno altresì come le suddette L R, Y Q.

Corollario IV.

Onde per distinguere in un tratto di canale H G le parti, che contengono acqua in una data proporzione, dividasi L R in Z, sicchè L Z a Z R sia nella data ragione, e tirisi la Z Q parallela all'asse, che conviene colla parabola in Q, che poi ordinata Q E, si averà la quantità d'acqua contenuta nell'alveo H E alla compresa nell'alveo E G nella data ragione di Q Y, ovvero L Z alla Z R.

Corollario V.

Se il fondo fasse cicloidale, essendosi provato nel Coroll. 1. della Prop. 19. che il corpo d'acqua E R Q M al corpo d'acqua G R Q O sta come la lunghezza di essa cicloide M Q alla lunghezza O Q: sarà ancora il tempo per M Q al tempo per O Q, nella stessa ragione delle dette lunghezze, ovvero in sudduplicata ragione dell'altezze C Q, S Q, giacchè le porzioni M Q, O Q della cicloide sono duple rispettivamente delle corde corrispondenti Q B, Q T, i quadrati di cui sono, come i seni versi Q C, Q S.

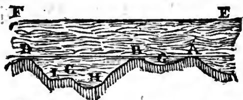


SCOLIO.

Nel trattare queste materie fisiche, i Mattematici poco ci ritrovano il loro conto, per le infinite circostanze, che variamente accompagnandole, mirabilmente ne alterano gli effetti, e fanno riuscire vano ogni tentativo di ridurli ad una perfetta regola. Tuttavolta si è cercato di superare ogni difficoltà, calcolando ancora le resistenze diverse, che s' incontrano ne' moti naturali, e valutandole per quello, che giudiciosamente può supporsi che operino. Ne abbiamo dato ancora noi di sopra qualche saggio, ma assai leggiermente, per non impegnarci tanto oltre i confini della Geometria, che potesse dubitarsi di perder ogni barlume di evidenza, col penetrare negli abissi più profondi della fisica, e ne' più secreti nascondigli della natura. Desidererà forse alcuno, che almeno nel trattare il moto dell' acque si avesse riguardo alla resistenza, che incontrano strisciando sopra il fondo aspro, e disuguale degli alvei, ed urtando contro le ripe, o di-

rupa-

rupàre, o interrotte da varj impedimenti. Il Signor Ermanno nella sua Foronomia lib. 2. prop. . supponendo le dette resistenze del fondo, e delle ripe essere proporzionali alle velocità, trova che la scala delle velocità rimane ancora una parabola, ma riferita ad un altr' asse da quello, che mostrano le sue applicate. Io per dir vero, non mi so persuadere, che debba farsi così gran caso di queste resistenze, in quanto riguardano la pura asprezza, e disuguaglianza sì del fondo, come di esse ripe; ma solamente in quanto presentino al corso dell'acqua dell'erbe, e virgulti, e canne, e simiglianti materie, che quanto più sono facilmente cedenti, tanto maggiormente snervano l'impeto dell'acqua, ed ismorzandolo, la fanno illanguidire nel suo movimento, comunicandone una gran parte a queste materie straniere.



Sia per esempio il fondo di un alveo A B C D; l' acqua urtando nelle prominenze A, C, D, certamente si ritarda, anzi del tutto si ristagna, rimanendo come acqua morta ne' gorghi, o cavità interposte, C I D, B H C, A G B; ma tirata la linea A D sopra le più alte prominenze, o ancora alquanto superiormente, per assicurarsi, che l'acqua superiore a detta linea C D non risenta punto dell' impedimento recato da questi dossi all' acqua inferiore, averemo finalmente un piano A D perfettamente liscio, sopra di cui l'acqua, senza alcuno intoppo scorrerà libera, e senza diminuzione della sua naturale velocità: non potendo avere letto più piano di quello, che le viene spianato dall'acqua inferiore stagnante fra le disuguaglianze del terreno.

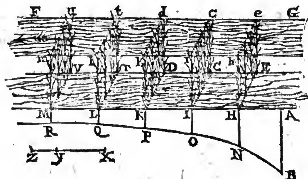
Le ripe poi, o si considerino secondo la posizione loro verticale, o secondo l'orizzontale, raffrenano bensì la velocità di quelle prossime parti dell'acqua, da cui vengono urtate, ma non credo che giungano a rallentare il moto dell'acqua verso le parti di mezzo dell'alveo; anzi riflettendo le parti contigue, ed avviandole verso il filone del fiume, talvolta le aggiungeranno velocità, non che possano diminuirla; bensì nello slargarsi dell'alveo d'un fiume, collo scostarsi le ripe, e lasciar divertire le acque in maggiore ampiezza, sono cagione, che le parti di mezzo si deviino dalla loro direzione, e si inervi in esse la velocità, che si diminuisce a misura, che cresce la sezione; laddove se mantenute si fussero le ripe più vicine, si sarebbe ancora più conservato lo spirito dell'acqua nel vigore della sua naturale velocità.

Due cagioni al mio credere più potenti a ritardare il corso dell' acqua sono, primo l'impedimento sopraccennato di cannucce, paglie, sterpi, e virgulti che talora ingombrano il canale a qualche notabile altezza; secondo il regurgito del recipiente per l'influente, o dell' influente nel recipiente, secondo che l'uno è pieno più dell'altro di acque, che naturalmente a maggiore altezza in quello, che in questo si dovrebbero disporre, onde per la legge della fluidità conviene, che si spargano per l'alveo delle più basse. Di queste due sorte d'impedimenti si possono dimostrare le seguenti proposizioni.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXV.

Essendo l'alveo E H S F impedito equabilmente da varie file di cannucce, o giunchi, ed alighe nate nel fondo, e ad altezza notabile cresciute, la velocità dell' acqua obbligata a passarvi frammezzo sarà ritardata secondo una progressione geometrica, sicchè la scala, da cui viene rappresentata, sarà una logaritmica A B R S.



Si figuri essere A H S la direzione del filone del fiume, ed in esso si distinguano tante parti eguali A H, H I, I K, K L, L M ec. esprimenti l'intervallo, che vi è tra le fila di queste canne, che attraversano l'alveo. H E, I C, D K ec. se la retta A B rappresenterà la velocità, con cui l' acqua investe il primo filare E H, e supposto cha la quantità della materia dell' acqua, che urta in un minimo tempo ne' suddetti virgulti H E, stia alla quantità della materia di essi, come X Y a Y Z, secondo le regole del concorso de' corpi non elastici (o posti in circostanze, in cui non possano la loro forza elastica esercitare) sarà, come la somma X Z d'ambidue alla X Y, che rappresenta il corpo che investe, così la velocità A B ad un'altra H N, questa sarà la velocità, con cui nel concorso si muovono ambidue i corpi; e però la stessa H N sarà la velocità competente all'acqua passato il primo filare H E, colla quale urtando nel secondo filare I C, di nuovo converrà fare, come X Z ad X Y, così H N ad un'altra I O; la quale sarà la velocità dell'acqua passato il secondo filare; e con questa investendo il terzo K D, converrà di nuovo fare, come X Z ad X Y, così I O a K P, che sarà la velocità dell'acqua dopo il terzo urto; e così sempre si troveranno le altre velocità L Q, M R ec. le quali rimangono vive nell'acqua dopo di avere superati gli ostacoli susseguenti de' filari L T, M V; le quali velocità A B, H N, I O, K P ec. formano una continua progressione geometrica in ragione di X Z ad X Y, ed essendo ordinate a distanze eguali dell' asse A H, H I, I K ec. saranno nella curva logaritmica B N P R; il che ec.

Co-

Corollario I.

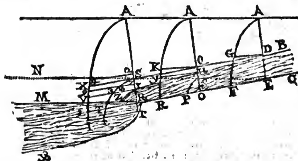
La velocità dell'acqua a lungo andare si fa minore di qualunque data, ogni qual volta duri per lungo tratto l'impedimento di tali virgulti.

Corollario II.

L'acqua si manterrà altissima dentro quest'alveo, non solo per l'ingombramento di tali corpi, che ne diminuiscono la capacità; ma ancora per compensare la tardità del moto, cagionata da' medesimi impedimenti.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Determinare la velocità dell'acqua d'un influente in qualunque sezione soggetta la regurgito del recipiente.



Supponghasi primieramente, essere il recipiente bassissimo, la cui sezione allo sbocco sia M K &, sicchè l'influente, il quale cammina sul fondo C K, ed ha la sua superficie disposta secondo la linea (retta, o curva) B D H I, vi trabocchi dentro colla cadente I Z. In questo stato di cose è certo, che il recipiente non cagionerà regurgito alcuno nell'influente; e per le sue sezioni D E, H O, I K, averà questi le sue velocità libere, senza ritardo alcuno; e se nella superficie D H, I ha le sue velocità, quali converrebbero ad un grave caduto dall'orizzontale A A (che prolungata concorrerebbe col fiume influente, nella sua origine reale, o equivalente) descritte le parabole A F E, A R O, A L R col medesimo lato retto, le porzioni di esse D G F E, H Y R O, I V L R, congruenti alle altezze delle dette sezioni D E, H O, I R, saranno le scale di velocità delle medesime sezioni, ed esprimeranno ancora la quantità d'acqua, per ciascuna sezione in egual tempo scaricata, e però saranno eguali di area fra di loro.

Cre-

Cresca ora l'altezza della superficie dell'acqua nel recipiente, e giunga al livello N S, che prolungato concorre in E col fondo C K dell'influente, e sega in S, S le sezioni K I, H O; e si descrivano colle cime S, S, agli assi S K, S O le parabole K S T, O S P dello stesso lato retto dell'altre, è manifesto, che l'acqua M N S K del recipiente si spargerà sopra la superficie più bassa I Z dell'influente, e farà forza per intrudersi nell' alveo di esso, con tali gradi di velocità, che sono in sudduplicata ragione delle altezze, dalle quali è spinta l'acqua, e forzata ad insinuarsi nell' istesso alveo, che però le parabole K S T, ovvero O S P, saranno le scale esprimenti coll'ordinate loro gl'impeti, da cui l'acqua dell'influente è rispinta indietro, e quindi, se dalla scala I V L K sarà detratta I 3 T K, e dalla scala H Y R O si leverà la S P O, li rimanenti mistilinei 3 V L T, H Y R P S saranno la scala delle velocità, che rimangono vive rispettivamente nelle sezioni I R, H O in quel primo istante, avanti che lo stesso influente siasi alzato di pelo, come poi subito succede; perchè con tale impedimento non iscaricandosi più tant'acqua come prima, ma tanto minore, quanto i detti mistilinei 3 V L T, H Y R P S sono rispettivamente minori de' trapezii parabolici I V L R, H Y R O, non può la cadente del fiume mantenersi sulla stessa linea D H I, ma l'acqua ritardata si fermerà in parte, aspettando la susseguente, colla quale accumulandosi si alzerà di pelo, finattanto che per le sezioni possa passare altrettant' acqua, come prima, e che giunga a spianarsi nello sbocco sopra la superficie elevata del recipiente S N. Per la qual cosa, posto il trapezio parabolico H Q K Y eguale alla parabola S P O, essendo il mistilineo Q K R P S eguale al trapezio H Y R O, che esponeva la quantità dell'acqua tramandata dalla sezione H O, quando era libera, sgorgherà eguale quantità d' acqua dalla sezione medesima elevata in Q, non ostante l' impedimento del regurgito S P O; e però il punto Q, come sopra determinato, sarà nella nuova cadente del fiume B D Q S: e nello sbocco, tirando l'ordinata S X alla stessa altezza del livello S N del recipiente, se il mistilineo S 3 V X uguaglierà precisamente il trapezio parabolico I 3 T K, e però l'area S 3 T L X pareggerà il trapezio I V L K, si smaltirà per la foce S K altrettant'acqua dell'influente, come prima, e si sarà ridotta la superficie del medesimo in uno stato di equilibrio, da durare finattanto, che non si varia o la superficie del recipiente, o la quantità dell' acqua somministrata dall'influente.

Ma se il mistilineo S 3 V X sarà maggiore del trapezio I 3 T K, si tiri l'ordinata 7 9, segante la parabola S T K in 8, in maniera tale, che il mistilineo 8 9 V 3 uguagli il detto trapezio parabolico I 3 T K; ed allora la vera cadente del fiume passerà per lo punto 7, e scaricherà la quantità d'acqua 8 3 T L 9 eguale alla quantità di prima I V L K; ma l'acqua del recipiente sotto l'orizzonte N S prolungata alle parti dell'influente, scorrerà per l'alveo di questo, colle velocità espresse dalla residua parabola S 8 7, e parrà, che il fiume corra all'indietro, benchè sia solo l' acqua del recipiente, che si sparge orizzontalmente, scaricandosi di sotto nell'altezza 7 K l'acqua dell'influente in egual copia di prima.

Se poi il mistilineo S 3 V X sarà minore del trapezio I 3 T R, fatto l'altro mistilineo 2 S 3 V 4 eguale al detto trapezio, sicchè tutta la figura 2 S 3 T L 4 uguagli il trapezio I V L R, si eleverà l'acqua dell' influente sopra quella del recipiente fino al punto 2, per avere una sezione 2 K, che scarichi altrettant' acqua di prima, traboccando sopra di esso recipiente; se pure non iscavasse il fondo dello sbocco verso il punto K, ab-

abbassandolo in r, acquistando dalla banda di sotto tale profondità R r, che il mistilineo S 3 s l X uguagli il primo trapezio I V L R, con che scaricherebbe la stessa acqua, senza elevarsi sopra il pelo del recipiente.

Corollario I.

L'effetto del regurgito non si risente mai nell'alveo dell' influente oltre il concorso E dell orizzontale N S col fondo dell'alveo C R: perchè la sezione D E non ha impedimento alcuno, che altresì la scala della sua naturale velocità D G F E.

Corollario II.

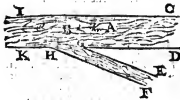
Si stende bensì a tanto maggiore lontananza, quanto più alta è l' acqua del recipiente, perchè elevandosi l' orizzontale N S, concorrerà col fondo C R oltre il punto E, e sopra di esso.

Corollario III.

La cadente dell' influente si fa meno inclinata all' orizzonte nel tratto regurgitato, che nel tratto superiore, o che non era avanti, che si elevasse la superficie del recipiente; e quanto maggiore è l' alzamento di questa, tanto meno pendente sarà quella, cioè più si accosterà all' orizzontale; anzi nel secondo caso considerato nella dimostrazione della proposizione, sarà perfettamente parallela all' orizzonte, essendo una pura espansione del recipiente per l'alveo dell' influente,

SCOLIO.

Si è supposto qui, che l' impressione dell' acqua del recipiente nell' affrontarsi con quella dell' influente si rappresenti dalle ordinate della parabola S T K, corrispondenti alle pressioni cagionate dall' altezza dell' acqua, senza considerare la velocità, di cui può essere dotato esso recipiente [se è un fiume reale, e non uno stagno, o il mare medesimo, di cui non vi sarebbe alcuna difficoltà in considerarlo, come un vaso pieno d' acqua stagnante] La ragione si è, perchè l' acqua del recipiente, quando pure corra con qualunque rapidità nell' alveo suo C D K I la sua direzione è da A verso B, non da G verso E su per l' alveo dell' influente, che gli è almeno in gran parte contraria; onde solamente in virtù della sua fluidità vi si insinua, trovandovi l' adito aperto G & F H, obbligatavi dalla pressione del proprio peso, con cui urterebbe la sponda G H, se fusse chiusa; e continua



nuata colle ripe D G, H K: onde siccome non preme le ripe parallele al suo corso, se non come fa l' acqua in un vaso stagnante le sponde di esso, cioè colla pressione dipendente dalle altezze, ed in ragione suddupplicata di esse; così aperta la sponda G H, non con altra proporzione può premere l' acqua dell' influente, che vi si affaccia: e lo stesso dicasi dell' influente F E G H, se ingrossando per le piene trovasse basso l' alveo G K I del recipiente: che in tale caso si spargerebbe sopra la superficie di esso, avanzandosi ancora verso le parti superiori da B verso A, giacchè vi troverebbe il luogo aperto, e senza contrasto, spandendosi come l' acqua di un vaso, cui si rompa la sponda, e traboccandovi con velocità proporzionali alle radici dell' altezza sua, giacchè la velocità particolare, di cui è dotato, e che dipende da più alta origine, non è diretta verso le parti superiori, ma verso le inferiori dell' alveo del recipiente. Onde, benchè faccia crescere l' acqua nel tronco superiore, non però oltre la suprema orizzontale della sua sezione allo sbocco, finisce il detto alzamento dove concorre l' orizzontale suddetta colla cadente del fiume, in cui è entrato: tanto è lungi dal far crescere sempre più il detto recipiente nelle parti più lontane, e superiori allo sbocco, come da un Autore, per altro celebre, e da me stimato, fu, non ha gran tempo, in alcune sue operette replicatamente asserito.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Comporre una Tavola, da me chiamata Parabolica, e spiegare l' uso di essa, che può essere di grandissimo utile in queste materie.

Si porterà questa Tavola nel fine di questo libro. Essa è divisa in tre colonne di numeri. La prima è la serie naturale arimmetica stesa da 1. fino a 1800. e questi rappresentano tante particelle eguali, siano once, o dita, o soldi di qualsivoglia misura. Se sono once, o dita corrisponderanno a 150. piedi, in ciascuno de' quali saranno dodici di tali particelle: se si suppongono essere soldi, corrisponderanno solamente a 90 braccia, contenendolene 20. in ciascun braccio: e così potrà riferirsi a qualunque misura. Questi numeri di particelle sono l' altezze dell' origine reale, o equivalente, onde cade l' acqua, o pure l' altezza dell' acqua medesima contenuta in un vaso, secondo l' uso, che vorrà farsi di essa Tavola. La seconda colonna contiene le radici esatte, o prossime de' numeri corrispondenti della prima; ed espongono le velocità competenti all' acqua sotto le altezze di essa prima serie. Le cifre, o i numeri, che in questa seconda colonna sono separati da un punto, indicano parti centesime: per esempio al numero 8. della prima colonna corrisponde per sua radice nella seconda 2. 83. che significa 2. con 83. parti centesime. Al numero 12. della prima colonna, sta scritto di contro nella seconda 3. 46. che indica per radice quadra del 12. doversi prendere 3. con 46 centesime parti; e sebbene 46. centesimi poteano ridursi a minori termini, cioè a 23. cinquantesimi, o poteasi prendere una frazione d' altro denominatore, che più prossima al vero rendesse la detta radice, (almeno in molti altri casi ciò sarebbe succeduto) tuttavolta non potendosi tutti alla stessa denominazione ridurre, si è stimato meglio, per l' uniformità, lasciare tutte l' espressioni sotto la medesima forma di parti centesime, e dove la radice è riuscita alquanto maggiore del vero, vi si è anteposto il segno +: dove minore il segno contrario —; e significano i già detti numeri particelle delle mede-

 sime

sime specie, siano once, o soldi, o dita, come nella prima colonna. La terza colonna è fatta da' numeri, che risultano moltiplicando i numeri della prima con quelli della seconda; onde in questi ancora vi sono separate dal punto le parti centesime, e si debbono intendere eccedenti, o difettivi, secondo che al numero della seconda colonna suo corrispondente precede il segno +, ovvero —, come sopra.

E' chiaro, che se i numeri della prima colonna esprimono le altezze d'una parabola, i numeri della seconda saranno le sue ordinate, quando il lato retto è l'unità; o almeno saranno proporzionali alle ordinate, in ragione suddupicata dell'unità al lato retto della proposta parabola; ed i numeri della terza colonna saranno i rettangoli circoscritti alla parabola, se ha per lato retto l'unità; o almeno saranno proporzionali, come sopra, a' detti rettangoli, in ragione suddupicata dell'unità al lato retto della parabola; e sempre saranno proporzionali all'area medesima parabolica, per essere questa due terzi del rettangolo circoscritto.

Che se la parabola averà per lato retto due particelle, e un quarto di quelle della prima colonna, essendo tutte le sue ordinate all'ordinate in pari altezza di quella parabola, che ha per lato retto l'unità, in suddupicata ragione di due, e un quarto, ad uno, cioè come uno è mezzo all'unità, o come il rettangolo circoscritto sta alla parabola medesima, è chiaro, che la parabola, il cui lato retto sia 2. con un quarto, sarà eguale al rettangolo, che circoscrive quella parabola, il cui lato retto è l'unità; ma tale rettangolo uguaglia il prodotto della base nell'altezza, cioè il numero corrispondente della terza colonna: dunque i numeri della terza colonna espongono le aree paraboliche, essendo ad esse eguali, quando il lato retto è 2. con un quarto, ed almeno alle medesime essendo proporzionali, quando il lato retto è di qualunque altra quantità.

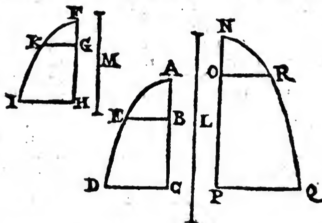
E però siccome i numeri della prima colonna espongono le altezze dell'acqua stagnante in un vaso, o le distanze di qualunque particella d'acqua corrente dal livello della sua origine, ed i numeri della seconda colonna rappresentano le velocità cagionate da tali altezze; così i numeri della terza colonna esprimono le quantità d'acqua, che in pari larghezza uscirebbero in un dato tempo per un lume, o sezione, la cui altezza fusse eguale a tutta la distanza fra il supremo livello dell'acqua stagnante, o fra l'origine del fiume ec. e la base di tale sezione, secondo il numero della prima colonna.

E le differenze de' numeri della stessa terza colonna, saranno le quantità d'acqua, che in pari larghezza in un dato tempo si scaricano da un lume, o sezione d'altezza eguale alla differenza de' numeri corrispondenti della prima colonna.

E sommando due, o più numeri della medesima colonna terza, si averà la somma delle quantità d'acqua portate in un dato tempo, ed in pari larghezza da più canali, le cui sezioni corrispondessero a' numeri della prima colonna, e l'aggregato di tali numeri, o il più prossimo ritrovandosi in qualche luogo della terza colonna, vi corrisponderà nella prima quel numero, che indicherà l'altezza capace di portare insieme que' canali uniti; come si intenderà meglio co' seguenti esempli.

Esempio I.

Siano due fiumi da unir insieme. Il primo maggiore, la cui larghezza L sia di piedi 760. La velocità della superficie sia B E, corrispondente alla caduta A B di un piede (colla quale secondo la Tavola del Guglielmini farebbe l'acqua in un minuto primo 216. piedi, e cinque once, cioè piedi 3. e tre quinti in ogni minuto secondo, o pure miglia due, e tre quinti scarsi per ogni ora) l'altezza delle sue piene B C sia piedi 30. onde tutta la A C piedi 31. dunque tutta



la parabola A E D C secondo la terza colonna della nostra tavola parabolica, dirimpetto all'altezza di piedi 31. si troverà essere 7175. 88. da cui levando la parabola A E B, che nella medesima terza colonna, in corrispondenza di un piede si trova 41. 52., sarà il trapezio parabolico B E D C solo 7134. 36. e questo sarà la scala delle velocità della sezione B C, che moltiplicata per la larghezza L dà la quantità dell'acqua eguale a 5422113. 60.

Abbia il secondo fiume di larghezza M, cioè piedi 139. la velocità sua superficiale sia G K, dipendente dall'altezza F G di once 8. (colla quale, per la Tavola del Guglielmini passerebbe l'acqua in un minuto primo piedi 176. ed in un secondo poco meno di 3. piedi, e in un ora farebbe miglia due, con 56. pertiche di più) Sia l'altezza delle sue piene G H di piedi undici, e conseguentemente tutta la F H sia di piedi undici, e once 8. cui corrisponde nella terza colonna della mia Tavola il valore della parabola F K I H, 1656. 20., e da questa levando la parabola F K G, che nella medesima terza colonna, in corrispondenza di once 8 si ritrova 22. 64., resta il trapezio G K I H, 1633. 56. e questa è la scala della velocità della sezione del secondo fiume G H, la quale moltiplicata per la larghezza M; darebbe tutta la quantità dell'acqua, che in un dato tempo sgorga da questo fiume nel suo alveo, eguale a 227064. 84, onde le due quantità d'acqua portate da ambi i fiumi saranno 5649178. 44. Suppongasi che passino unite, senza accrescere la velocità B E, cui pongasi eguale O R, e sia l'ignota O P l'altezza, sotto cui queste acque unite scorrono; sicchè posta ancora O N eguale a B A, e descrivendo per R su l'asse N P la parabola N R Q P, il tronco parabolico O R Q P sarà la scala della velocità de' fiumi uniti, che moltiplicata per L, uguaglierà la somma di quelle due quantità, cioè 5649178 44, e però dividendo questo numero per L, sarà il quoziente 7433. 13. eguale al suddetto trapezio parabolico O R Q P, ed aggiuntavi la parabola N R O, cioè 41. 52, si averà tutta la parabola N R Q P eguale a 7474. 65. Cerco questo numero nella terza colonna della mia Tavola, e non trovandolo precisamente, pi-

glio il più prossimo, che è 7464 28., e veggo che corrisponde ad un altezza di piedi 31., once 10. ma essendo il mio numero alquanto maggiore, trovo per la parte proporzionale doversi aggiungere un terzo d' oncia. Sarà dunque N P piedi 31 once 10 e un terzo, e l'altezza O P piedi 30. once dieci e un terzo: sicchè la unione del secondo col primo fiume, fa alzare la sezione B C dieci once e un terzo. Il che doveasi determinare.

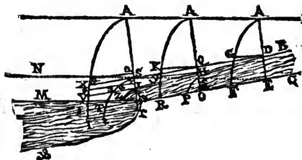
Ma se nel corso de' fiumi la velocità B E si aumentasse diventando O R, sicchè l'altezza N O, da cui dipende, ecceda A B di un oncia sola, sarà la parabola N O R corrispondente ad once 13. d' altezza di valore 46.93. che aggiunta al trapezio R O P Q trovato come sopra 7433. 13. si averà tutta la parabola N R Q P eguale a 7480. 06. il quale numero essendo prossimo al medesimo 7464. 28. corrispondente a piedi 31. once 10. ma con tale eccesso, la cui parte proporzionale importa circa una metà della differenza, vengo in cognizione doversi accrescere l' altezza trovata di mezz' oncia: onde N P sarà piedi 31. oncie 10. e mezza, e detratta N O, che è 13. once, resta O P piedi 30. once 9., e mezza: sicchè l' alzamento importerebbe in questo caso 9. once, e mezza.

Che se si voglia supporre, come ne' fiumi orizzontali accade, perquanto crede il Guglielmini, e non è inverisimile secondo le osservazioni, che la scala della velocità in ogni sezione sia la parabola intiera, e non un tronco parabolico, dipendendo la velocità unicamente dalla pressione, come ne' vasi: onde la superficie abbia solo tanto movimento, quanto le viene comunicato dall' acqua inferiore, che la trasporta; sarà allora più spedito il calcolo, perchè essendo A C piedi 30. l' altezza delle piene del primo fiume, ed F H piedi undici altezza di quelle del secondo, sarà la parabola A E D C di valore 6829. 20. nella terza colonna della mia Tavola, che moltiplicata per la larghezza L piedi 760. darà la quantità dell' acqua 5190192. 00, e la parabola F I H sarà 1516. 68., che moltiplicata per la sua larghezza M di piedi 139. dà la quantità d' acqua di valore 210818. 52, onde la somma d' ambidue le quantità è 5401010. 52. questa divisa per la larghezza L ci darà (quando non si accresca velocità alla superficie) la parabola N Q P di valore 7106. 59. in circa, corrispondente all' altezza di piedi 30 once 10., a cui nella mia Tavola corrisponde il numero 7118. 80. che è poco maggiore del suddetto. Però l' alzamento sarà di quasi 10 once: il che ec.

Che se poi la velocità nell' unione de i due fiumi crescesse, si diminuirebbe l' altezza in ragione reciproca di essa velocità; di maniera che, se la velocità si augumentasse di un centesimo, si ridurrebbe l' altezza a poco più di 30 piedi e mezzo, sicchè l' alzamento sarebbe circa sei once: se crescesse la velocità una vigesima quinta parte di quella di prima, sarebbe l' altezza di piedi 29., e quasi once 8. di maniera che l' altezza, in vece di crescere, sarebbe scemata per tale unione circa once 4. siccome sarebbe rimasa precisamente della medesima altezza di piedi 30., quando la velocità fusse cresciuta d' una trigesima sesta parte: perchè, come 37. a 36., così appunto stanno piedi trenta, e dieci once, a piedi trenta.

Esem-

Esempio II.



L'influente C B D R in un determinato punto del suo letto O ha l'altezza O H, avendo libero l'esito nel recipiente K M quando è basso, e la sua velocità superficiale in H è quale si converrebbe alla caduta A H di piedi 4. Alzandosi ora la superficie N S del recipiente, ne segue regurgito per l'alveo dell'influente. Si desidera sapere, quanto per ciò sia per alzarsi la prima altezza O H, che era di piedi sette? Si supponga crescere fino in Q: e tirata la parabola A K R, colle sue ordinate H Y, Q K, sia la parte O S, tagliata dal prolungamento del livello del recipiente, eguale a piedi 3. sarà tutta la A O piedi undici; e per la mia tavola, sarà la parabola A O R 251668. l'altra A H Y, che è alta piedi 4., sarà 332. 64. onde il trapezio H Y R O, scala delle velocità, ed insieme imagine della quantità d'acqua, che passa in un dato tempo per la sezione H O, sarà 1184. 04. Si faccia la parabola S P O di piedi 3. d'altezza: sarà questa 216. 00. Dunque per la prop 36., il trapezio parabolico Q K Y H essendo eguale alla detta parabola S P O, sarà esso ancora 216 00.; che tolto dal valore sopra trovato della parabola A H Y, resta la parabola A Q K 116 64 Cerco questo numero nella terza colonna della tavola parabolica, e non trovandolo, piglio il prossimamente maggiore 117. 60., che corrisponde all'altezza di due piedi, onde vengo in cognizione, che il regurgito nel sito O ha fatta alzare l'acqua quegli altri due piedi, che mancano alla caduta di prima, supposta di piedi 4.

SCOLIO.

Molti altri usi può avere la medesima tavola (oltre quello già obvio di trovare subito nella seconda colonna le radici prossime de' numeri della prima) i quali potrà da se stesso l'industria de' Leggitori andare rintracciando, applicandola a varj casi, in cui debba, o derivarsi un ramo da un fiume, o dilatarci, o ristringerci l'alveo, o calcolare la quantità d'acqua

portata ec solamente non voglio tralasciare quì di avvertire, che la velocità superficiale supposta nel secondo esempio, come dipendente dalla caduta di piedi 4 ne' luoghi vicini allo sbocco d'un fiume, e però soggetti al regurgito, è forse troppo eccessiva; altrimenti, secondo la regola del Signor de la Hire, nelle memorie dell'Accademia regia del 22. Novembre 1702., l'acqua di detto fiume si vedrebbe camminare da piedi 15. di Parigi in un secondo minuto: ovvero, attesa la regola delle Tavole del Guglielmini, ne passerebbe almeno piedi 7., e mezzo di Bologna; quando il suddetto Signor de la Hire attesta nel luogo accennato, non darsi caso, che un fiume ordinariamente cammini più di sei piedi regj in un minuto secondo. Tuttavolta, ritrovandosi fiumi, che per la rapidità della sua superficie non si possono navigare, e riuscendo in istato di piena grande quasi tutti impraticabili. e massimamente vicino agli sbocchi; ed avendo noi ancora osservato l' anno 1719. di Novembre nel Tesino poco sotto al Ponte di Pavia, in sito certamente rigurgitato dal Po, che era allora in una massima piena, muoversi esso Tesino con tale rapidità, che facea talvolta deviare il pendolo dal perpendicolo oltre a gradi 80. non posso rivocare in dubbio, che sia possibile l'addotta supposizione, e che possa ammettersi, come un esempio, che talora potrà succedere in pratica.



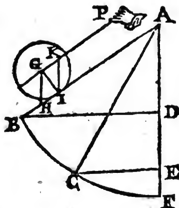
CA.

CAPITOLO VI.

Della impressione dell' acqua sul fondo de' canali, sopra di cui scorre, e contro le ripe da essa percosse, ed altri ostacoli opposti al suo corso.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Le forze, colle quali l' acqua ne' canali inclinati preme il fondo, sono come i seni della declinazione de i detti canali dal perpendicolo.



Sia il fondo del canale A B declinante dal perpendicolo per l'angolo B A F, e descrivasi col raggio A B l'arco B F, segato in C dal fondo di un altro canale A C: tirate le orizzontali B D, C E, dico che la forza, con cui l' acqua preme il suo fondo A B, a quella, con cui preme il fondo A C, sta come il seno B D al seno C E; imperocchè Imaginandosi tutto il peso dell' acqua, che preme sul punto I, del fondo A B, raccolto nel globo G, il quale venga sostenuto da una forza P per la direzione G K parallela ad esso fondo, acciocchè non iscorra per esso, e tirata la G H perpendicolare all' orizzonte, secondo la direzione della gravità, congiungendo al contatto la G I, che gli è perpendicolare, si compisca il parallelogrammo G H I K. Saranno dunque tre forze in equilibrio, l' una è P, che sostiene il globo, e impedisce, che non iscorra pel piano, onde uguaglia la forza, con cui esso globo scenderebbe, se non fusse trattenuto: la seconda è la forza della gravità G H, la quale tira il globo abbasso; e da queste si compone la terza forza G I, con cui il medesimo globo si aggrava sul piano, la quale viene rintuzzata dalla resistenza del piano sostenente l' impeto del globo, col respignerlo per la direzione I G. Saranno dunque queste forze come i lati, ed il diametro del suddetto parallelogrammo; e però la forza intiera della gravità, per cui liberamente scenderebbe il globo, sta alla forza, con cui questo preme il piano inclinato A B, come G H a G I, ovvero per la similitudine de' triangoli, come il raggio A B al seno B D. Per la stessa ragione si mostrerebbe essere la forza, con cui è premuto il piano A C alla forza totale della gravità libera, come il seno E C al raggio A C, ovvero A B; dunque per l' ugual proporzione, la forza con

 cui

cui è premuto dall'acqua il piano A B, a quella, con cui premuto sarebbe il piano A C, sta come il seno B D al seno C E; il che ec.

Corollario.

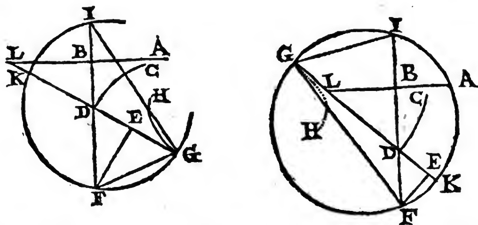
Lo stesso vale delle ripe fatte a scarpa, quando restano coperte dall'acqua, la quale similmente le preme in ragione de i seni, per cui la scarpa di esse ripe declina dal perpendicolo.

SCOLIO.

Si suppongono quì essi fondi, o pendenze delle ripe, essere superficie piane; perchè se fussero concave, o convesse, dovrebbe la misura della pressione aumentarsi, o diminuirsi, per cagione della forza centrifuga, la quale vi si mescolerebbe ad accrescere nel primo caso, ed a scemare nel secondo, l'impressione fatta dalla gravità dell'acqua; laddove se il fondo è piano, riesce infinitamente piccola la forza centrifuga, onde non altera la misura della pressione sopra dimostrata. Volendo però nei casi del fondo curvilineo calcolare la detta forza di pressione, o di aggravamento, si dovrà attendere la seguente

PROPOSIZIONE XXXIX.

Sia il fondo dell'alveo (o il pendio della ripa bagnata dall'acqua) disposto secondo la curva C D concava, o convessa, generata dallo svolgimento della curva H G, si cerca la pressione, che vi fa l'acqua in qualsivoglia punto D.



L'origine reale, o equivalente del fiume sia nell'orizzontale A B, e tirata la verticale D B, si prolunghi altrettanto verso I, sicchè sia D I dupla di B D. Prendasi ancora in essa verticale la D F per misura della forza assoluta, con cui l'acqua premerebbe con tutto il momento della sua gravità libera un fondo orizzontale: e tirata F E perpendicolare sopra D G raggio del cerchio combagiante essa curva C D in D, si congiungano I G, F G, e circoscrivasi al triangolo I G F il cerchio I G F K, concor-

corrente colla G D in K. Dico, che la somma delle due rette D K, D E, nel caso del fondo concavo, e la differenza delle medesime, quando il fondo è convesso, sarà la vera misura della forza, con cui l' acqua preme il soggetto fondo nel punto D.

Imperocchè, essendo i punti I, K, F, G nel cerchio, sarà il rettangolo I D F eguale al rettangolo G D K; e però G D a D I starà come D F a D K; ma D I è il duplo dell'altezza B D, onde cadendo l'acqua si è acquistata la velocità, con cui cammina in D, e D G è il raggio del cerchio combagiante, e la D F misura la gravità totale, con cui l' acqua si aggraverebbe sull' orizzonte, dunque la quarta proporzionale D K dopo le tre G D, D I, D F, in vigore della teoria della forza centrifuga, esprimerà la forza, con cui viene tirato il filo G D nel descriversi della curva C D: la quale azione è contro il fondo C D concavo, e tende a premerlo, ma al contrario allontana l'acqua dal fondo convesso, e lo solleva dalla pressione. Ma per la proposizione antecedente, essendo la medesima D F misura della forza totale della gravità, riesce la D E, seno dell' inclinazione, che ha il fondo nel punto D, colla verticale B D, misura della pressione, con cui l'acqua dee premere il fondo nel detto punto, come se fusse un piano inclinato; dunque nel caso della concavità del fondo, in cui si uniscono amendue queste forze a premere il punto D, sarà la somma delle due rette D K, D E la misura della sua intiera pressione; laddove nel caso del fondo convesso, operando queste due forze per direzioni contrarie, la misura della pressione (se pur ve ne resta) sarà l'eccesso della D E sopra la D K; il che ec.

Corollario I.

Nel caso del fondo concavo, quando l' angolo D I G è acuto, la forza centrifuga è maggiore di quella, con cui per se stessa l' acqua premerebbe sul punto D del fondo C D: perchè ancora l' angolo D K F sarà acuto, e la perpendicolare F E cadendo dalla parte di esso angolo, riuscirà K D maggiore di D E; ma quando il detto angolo fusse ottuso, caderebbe la detta perpendicolare dall'altra parte, e però la forza centrifuga espressa per la D K sarebbe minore della forza della pressione della gravità sul punto D, espressa per la D E; e se l'angolo D I G fusse retto, essendo allora ancora l' angolo D K F retto, il punto E caderebbe sul punto K, e sarebbero ambe le forze D K, D E tra di loro eguali.

Corollario II.

Nella cicloide, la cui base fusse nell'orizzontale A B, accaderebbe appunto quest' ultimo caso, perchè essendo ivi la G D dupla sempre della L D, siccome I D è dupla della D B, la I G sarà parallela all' orizzonte, e l' angolo G I D retto; onde un corpo che cada lungo la curva cicloidale, calcherà la medesima colla forza centrifuga eguale alla forza relativa, con cui la preme per se stessa la gravità; e però la pressione totale, dipendente da queste due cagioni sarà dupla di quella, che dipenderebbe dalla gravità sola: come osservò Monsù Parentio nelle memorie dell' Accademia Regia delle scienze a 12. Marzo 1708.

Co-

Corollario III.

Potrà la totale pressione originata da amendue queste forze essere eguale, maggiore, o minore della pressione, con cui l'acqua quieta premerebbe un fondo orizzontale, secondo che il complesso delle due K D, D E sarà eguale, maggiore, o minore della D F esprimente la forza totale della gravità sola; e specialmente nella cicloide si può osservare, che cadendo un grave per essa, posta l'origine del moto nella base per fino, che non giugne a passare l'altezza corrispondente alla quarta parte del diametro del cerchio generatore, la somma delle dette pressioni sarà minore di quella, con cui calcherebbe colla sola sua gravità il piano orizzontale. Nel punto stesso dell'altezza eguale alla detta quarta parte del diametro, il complesso di quelle due pressioni uguaglierebbe appunto la pressione totale della gravità, ma d'indi in giù l'aggregato di quelle sempre sarebbe maggiore di questa; di maniera che per lo più si ricercherà maggiore resistenza in un cannale concavo, per reggere alla pressione dell'acqua, che se fusse non solamente retto, ed inclinato all'orizzonte, ma ancora se dovesse sostenerla orizzontalmente; il che pare un paradosso, e pure è verissimo, essendo quasi sempre la somma delle due D K, D E maggiore della sola D F.

Corollario IV.

Ma nel caso del fondo convesso, quando la forza centrifuga D K uguaglierà la forza D E, con cui la gravità dell'acqua per se stessa premerebbe il piano in D, sarà nulla la differenza loro, e però l'acqua che vi caminerebbe sopra, non la premerebbe punto più di quello, che un arco già compiuto, ed assodato, aggravi la centina sopra cui è fatto, potendo stare senza il sostegno di essa; onde ancora abbassato, o levato il detto fondo, l'acqua seguiterebbe a descrivere la stessa curva per aria, come fa la vena d'una fonte co' suoi zampilli.

Corollario V.

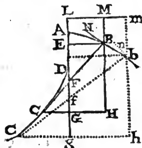
Anzi può darsi caso, che detta forza centrifuga sia maggiore di quella, con cui la gravità premerebbe il piano; onde allora l'acqua nè meno seguiterebbe la curvatura del fondo, ma sollevandosi da esso, si piegherebbe in un arco superiore, in cui venisse equilibrata precisamente la forza centrifuga con quella della gravità suddetta; il quale arco si vedrà nella prop. seguente essere parabolico.

PROPOSIZIONE XL.

Quando l'acqua, o altra proietto, descrive una parabola A B, essendo spinta coll'impeto, o velocità competente all'altezza della caduta L A; in qualunque suo punto B sarà la forza centrifuga, derivata dalla descrizione di essa parabola, sempre equilibrata con quella forza, che la gravità impiegherebbe a premere la detta curva A B, come se fusse il fondo d'un canale, sopra di cui passasse, spingen-

gendolo secondo la B F perpendicolare di essa curva nel medesimo punto B.

Sia la curva D C quella, dal cui svolgimento nascerebbe la parabola suddetta A B. E' manifesto, per la teoria delle Evolute (e da quanto ho detto nel problema 8. del mio Calcolo Integrale all' esempio primo) che la distanza dal vertice A D uguaglierà la metà del lato retto, onde sarà duplo della sublimità L A. Dunque girando l'acqua per la curva, nel punto A si trova a descrivere come la circonferenza d'un cerchio combagiante la parabola in A, il cui diametro sarebbe quadruplo dell'altezza L A, e perciò secondo Cristiano Ugenio alla prop. 5. del suo Trattato delle forze centrifughe, sarà lo sforzo, con cui tende ivi ad allontanarsi dal centro D, cioè la sua forza centrifuga, eguale all' intiera sua gravità, con cui premerebbe, posata in A, un piano orizzontale. Ed è la velocità in A alla velocità in B, in sudduplicata ragione dell' altezze A L, B M, onde il quadrato della velocità in A sta al quadrato della velocità in B, come A L a B M, o come A D dupla di A L, a B H, che è dupla di B M (perchè nel problema ottavo citato si determina il punto C, ponendo F G dupla di A E come E F sunnormale è dupla di A L, onde tutta la E G, ovvero B H, è dupla di E L, cioè di B M) dunque la ragione composta de i quadrati delle velocità, e della reciproca de' diametri, o raggi B C, A D [che tale secondo Cristiano Ugenio ivi alle Proposizioni 2. e 3. provasi la ragione della forza centrifuga in A alla forza centrifuga in B] sarà composta di B C alla A D, e della A D alla B H: cioè sarà la forza centrifuga in A, a quella che è in B, come il raggio B C alla B H, seno dell' angolo B C H, ovvero N B M, fatto dall'inclinazione della parabola nel punto B col perpendicolo: ma ancora la gravità totale, che premerebbe l'orizzonte, a quella parte di gravità, che premerebbe il piano inclinato N B; per la Prop. 38., è nella stessa ragione del raggio B C al seno B H; dunque la forza centrifuga in A, alla forza centrifuga in B, sta come la gravità totale, con cui l'acqua premerebbe l'orizzontale piano, che toccasse la curva nella sua cima A, alla gravità relativa, con cui l'acqua premerebbe il piano inclinato N B, che tocca la stessa curva in B; ma si è veduto, essere la prima eguale alla terza; dunque la seconda è eguale alla quarta; e però in qualsivoglia punto B del suo corso parabolico l'acqua è affetta d' una forza centrifuga, che uguaglia la forza della gravità relativa, la quale si eserciterebbe nello stesso punto della parabola contro la sua direzione; e però uguagliandosi, ed equilibrandosi una forza coll'altra, non ne seguirà effetto alcuno di pressione, onde non è maraviglia, se l'acqua, che esce per un lume da un vaso, non cada a piombo, lasciando la traccia della parabola che descrive; siccome ancora, che i proietti non abbandonino la curva parabolica da essi descritta; il che ec.



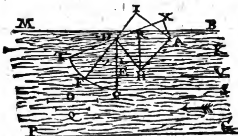
Co-

Corollario.

Onde è chiaro, che se il letto d'un fiume avesse il fondo parabolico A B convesso, e che il lato retto di tale parabola fusse quadruplo dell'altezza L A, onde il fiume è disceso (quale sarebbe la parabola, che dovrebbe descriversi dall acqua, lasciandola liberamente uscire dal lume verticalmente aperto in un vaso sotto la medesima altezza L A, colla direzione orizzontale) esso fondo nulla premuto sarebbe dall'acqua, che vi camminerebbe sopra: perchè quando ancora non ci fusse, l'acqua anderebbe per la medesima strada parabolica, rimanendo la gravità sua sospesa, ed equilibrata dalla forza centrifuga.

PROPOSIZIONE XLI.

Urtando il fiume G B M P sopra l'ostacolo fermo D C opposto direttamente al suo corso, sicchè la direzione dell'acqua lo ferisca ad angoli retti, ed incontrandone un altro D F di eguale lunghezza, ma obliquamente disposto: sarà l'impressione fatta sul primo, a quella, che farà sopra il secondo, come il quadrato del seno totale A D, al quadrato del seno dell'inclinazione, o sia dell'incidenza A I.



Perchè l'ostacolo diretto D C, riceverà tutto il moto dell'acqua racchiuso tra i fili paralleli A D, S C; ma l'obliquo D F riceverà solamente il moto dell'acqua, che è interposta tra i fili A D, V E, la quale batterebbe la sola parte D E dell'ostacolo diretto; e di questa ancora il predetto ostacolo obliquo D F non riceverebbe altrimenti tutto il moto, ma quella parte sola, che gli riesce perpendicolare; essendo che risolvendosi il moto per A D ne i due collaterali A I perpendicolare al piano D F, ed A H parallelo al medesimo, egli non vi ha dubbio, che la forza A H nulla offende il detto ostacolo, ma la sola forza A I. Sarà dunque l'impressione sopra l'ostacolo D C a quella sopra la parte D E, come C D a D E, che sono le misure delle quantità d'acqua, che direttamente urtano nell'uno, e nell'altro piano colla stessa velocità: ma l'impressione fatta dall'acqua A V E D sopra D E all'impressione ricevuta dalla medesima sul piano D F sta, come A D ad A I, cioè, per la similitudine de' triangoli A I D, D E F, come D F, ovvero D C a D E: dunque l'impressione sopra C D all'impressione sopra D F sta in regione composta di C D a D E, e di bel nuovo un altra volta di C D a D E, che è quanto dire nella ragione duplicata di C D a D E, o come il quadrato C D, che è lo stesso di D F al quadrato D E; che è quanto dire, come il quadra-

drato del seno totale A D al quadrato del seno A I dell'angolo di inclinazione, o incidenza fatto dalla direzione dell'acqua, colla posizione dell' ostacolo; il che ec.

Corollario I.

Similmente essendo l' ostacolo in un altra posizione D T, si proverà, essere l' impressione sopra D T all' impressione sopra l' ostacolo diretto D C; come il quadrato del suo seno d' incidenza A X, al quadrato del seno tale A D; onde per l' ugual proporzione, sarà l' impressione sopra D T all' impressione sopra D F, come il quadrato del seno A X al quadrato del seno A I; ovvero come il quadrato della D L al quadrato della D E.

Corollario II.

Per la qual cosa ancora potrà dirsi essere le impressioni sopra due ostacoli D T, D F egualmente lunghi, e variamente inclinati, in duplicata ragione delle quantità d'acqua, che vi battono sopra; perchè sono, come i quadrati delle D L, D E, che misurano la quantità dell' acqua A D L K, che va sopra il primo, e la quantità A D E V, che batte sopra il secondo.

Corollario III.

Onde si vede, che la massima impressione fatta sopra un penello, o altro ostacolo opposto al corso dell'acqua, è quando la riceve ad angoli retti, come D C, e sempre minore si fa la detta impressione; quanto più è inclinato l'ostacolo al corso del fiume; onde è minore quella che tocca a D T, che quella che tocca a D F, per essere più acuto l'angolo D T L, che l'angolo D F E.

Corollario IV.

Apparisce ancora, che venendo urtato un ostacolo D F per la direzione A D, non riceve impressione alcuna secondo A H parallela al detto ostacolo, ma solamente resta spinto per la direzione A I, ovvero H D, che gli è perpendicolare.

SCOLIO I.

E' ben vero però, che questa stessa impressione secondo H D tirando H R perpendicolare ad A D, potrà dividersi nelle due collaterali H R, R D; delle quali la prima, quando l' angolo F D A sia ottuso, tende a stringere maggiormente l' ostacolo contro la ripa, e tenervelo unito, o spignerlo verso quelle parti, se ne è staccato, e l' altra impressione è diretta a spignersi avanti il detto ostacolo per la direzione del fiume. Ma quando l' angolo F D A è acuto, cospira ancora la prima impressione a stac-

staccare dalla ripa il detto ostacolo, e trabalzarlo verso il filone del fiume, essendo allora diretta la H R verso la ripa opposta alla contigua B M; onde rare volte accade, che possano sostenersi i penelli fatti per riparo del fiume in tale disposizione: oltre il pericolo di cagionare la rovina della ripa, co' vortici, che forma l'acqua riflessa dentro l' angolo acuto, mentre ritorna come in se stessa, e agitata in giro scava il terreno di sotto, facendo franare la sponda.

SCOLIO II.

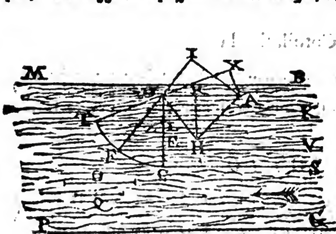
Tutto ciò, che si è detto dell' ostacolo D F supposto piano, vale ancora di ciascun punto, o di qualunque parte infinitamente piccola D d di un ostacolo curvilineo D f, essendo che si può prendere per coincidente col piano D d h, che ivi la tocca, prese per eguali, o costanti le stesse particelle elementari D d, d e, e t, ec. componenti l'ostacolo curvilineo: ma non già paragonando un intiero ostacolo curvo ad un altro, retto, o curvo che siasi; perchè non hanno le curve una sola inclinazione col filone del fiume, ma in ogni suo punto la mutano.



PROPOSIZIONE XLII.

Quanto maggiore sarà poi la superficie dell' ostacolo esposto all' azione dell' acqua, tanto maggiore impressione riceverà da essa, in parità dell' altre circostanze.

Imperocchè, siccome movendosi qualche corpo solido in un mezzo fluido, tanto maggiore è la resistenza, che vi incontra, quanto maggior superficie viene applicata contro di esso fluido: così vicendevolmente, movendosi colla stessa velocità il fluido contro il solido, lo spignerà con maggior forza, a misura della maggior superficie, contro di cui è spinto, e sopra di cui ha presa, purchè sieno altronde eguali tutte l'altre circostanze.



Co-

Corollario I.

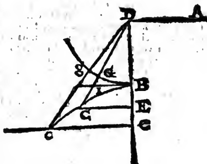
Essendo adunque due ripari rettilinei D Z, D T di lunghezza diversa, e variamente inclinati, la totale impressione sopra il primo all' impressione totale sopra il secondo sarà in ragione composta di quella delle lunghezze D Z, D T corrispondenti alle loro superficie, e di quella de' quadrati fatti da' seni delle loro inclinazioni, cioè del quadrato A I al quadrato A X. Imperocchè posta la lunghezza D F eguale alla D T, sarà l' impressione totale sopra D Z all' impressione totale sopra D F, come la stessa D Z alla D F: ma l' impressione sopra D F all' impressione sopra D T, per la Prop. 41. sarà, come il quadrato A I al quadrato A X; dunque l' impressione sopra D Z all' impressione sopra D T è in ragione composta delle lunghezze loro, e della duplicata de' seni d' inclinazione, cioè de' quadrati fatti da essi: il che ec.

Corollario II.

Essendo la lunghezza D Z alla lunghezza D T reciprocamente, come il quadrato del seno A I, corrispondente all' inclinazione di questo, al quadrato del seno A X, corrispondente all' inclinazione di quello, le totali impressioni sopra de' ripari rettilinei D Z, D T saranno eguali; e viceversa, se queste impressioni sono eguali, saranno le lunghezze reciproche a' quadrati de' suddetti seni. Perchè generalmente componendosi una ragione di due altre ragioni, ove queste sono le medesime reciprocamente, ne nasce la ragione di egualità, e per lo contrario, ogni uguaglianza nasce da ragioni componenti, che reciprocamente siano le medesime: come accade ne' rettangoli, la cui ragione si compone di quella de' lati, e così ne' coni, e cilindri, e prismi, e piramidi, che sono in ragione composta di quella delle basi, e di quella dell' altezze, ec.

Corollario III.

Se dal medesimo punto D si disponessero innumerabili ripari, secondo tutte le possibili inclinazioni, come D B, D C, D c, li quali ricevessero dall' acqua, che scorre per la direzione A D delle impressioni totali di eguale quantità, sarebbero i punti loro estremi B, C, c in una linea del terz' ordine da determinarsi, come appresso. Sia D B perpendicolare alla direzione dell' acqua A D, cui sia parallela B I, e fatto l' arco di cerchio B G col rag-



raggio D B, stendasi la segante D G I, e si prolunghi in C, sicchè sia D C terza proporzionale dopo le due D G, D I, sarà il punto C nella curva, che passa per tutti gli estremi de' ripari D B, D C, D c incontrati dall'acqua con eguale impressione totale; perchè tirata C E parallela alla A D; essendo E D a D B, come C D a D I, cioè per costituzione, come I D a D G, siccome li conseguenti D B, D G sono eguali, saranno altresì eguali gli antecedenti E D, I D; ma il quadrato C D al quadrato D I sta, come C D a D G, ovvero D B; dunque la lunghezza del riparo C D alla lunghezza del riparo D B, sta come il quadrato C D al quadrato I D, ovvero E D; ma C D ad E D è come il seno dell'angolo retto A D B al seno dell'angolo d'inclinazione D C E, ovvero A D C; dunque le lunghezze de' ripari sono reciproche a' quadrati de' seni della loro inclinazione; e però ricevono impressioni eguali.

SCOLIO.

Questa curva B C c è la medesima da noi nominata, e proposta nella Lettera Geometrica al P. Ceva num. 10. ove asserisco, essere ella eguale alla lunghezza d'una certa curva parabolica, tagliata da un cono, il cui triangolo per l'asse fusse equilatero, e col distendere in piano la superficie conica, spiegata anch'essa, e ridotta nello stesso piano. Veggasi la suddetta nostra Lettera Geometrica annessa al libro della dimostrazione de' Teoremi Ugeniani pag. 197.

PROPOSIZIONE XLIII.

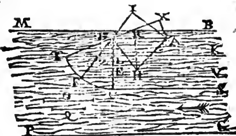
Essendo diverse le velocità, colle quali si muovono due fiumi per la loro direzione, in parità di lunghezza de' ripari opposti, ed egualità dell'inclinazione loro col filone del fiume, saranno l' impressioni fatte in essi in ragione duplicata di quelle delle dette velocità.

Per la Prop. 25. del primo libro le forze motive, o sia i momenti dell' acqua sono in ragione composta della diretta delle sezioni, che misurano l' ampiezza, ed estensione, con cui vengono ad urtare le acque mosse contro un ostacolo, e della duplicata delle velocità, onde in parità delle dette sezioni saranno in duplicata ragione di esse velocità, o come i loro quadrati; ma l'impressioni fatte sopra due ostacoli eguali, e similmente posti, corrispondono a' suddetti momenti come alle loro adequate cagioni, dunque esse ancora, in parità d'altre circostanze, sono in duplicata ragione delle velocità: perchè se potesse la medesima copia d'acqua nello stesso tempo con diversa velocità investire l' ostacolo, sarebbe la forza del colpo tanto maggiore, quanto semplicemente fusse maggiore la velocità: ma perchè nello stesso tempo una maggiore velocità porta contro l' ostacolo una quantità d'acqua altrettanto maggiore, non potendo muoversi un fiume, per esempio, il doppio più veloce, se non conduce in qualsivoglia minima particella di tempo il doppio più d' acqua ad urtare contro il medesimo ostacolo; perciò dovrà crescere per quest' altro capo di nuovo nella stessa ragione il vigore dell' urto, e però le impressioni sono in duplicata ragione delle velocità; il che ec.

Co-

Corollario I.

Quindi si ha, che se il fiume B G P M urterà prima colla velocità O nell' ostacolo D Z; indi colla velocità Q nell' ostacolo D T, l' impressione fatta nel primo, a quella fatta nel secondo, sarà in ragione composta di quella del quadrato A I al quadrato A X, che sono i seni delle loro inclinazioni, e di quella della superficie D Z alla superficie D T, e della duplicata delle velocità, cioè del quadrato O al quadrato Q:



perchè se urtasse colla velocità O nell' ostacolo D Z; indi colla stessa velocità nell' ostacolo D F eguale a D T, poi nell' ostacolo D T, colla medesima velocità O, e finalmente nello stesso D T colla velocità Q, sarà la prima impressione alla seconda, come la superficie D Z alla superficie D F, ovvero D T: la seconda impressione alla terza, come il quadrato A I al quadrato A X; e la terza alla quarta O al quadrato Q; dunque la prima impressione alla quarta è in ragione composta delle superficie degli ostacoli, e de' quadrati sì de' seni dell' inclinazioni loro, come delle velocità dell' acqua.

Corollario II.

Onde sarà eguale la totale impressione sopra due ostacoli, se o in parità di lunghezza siano le velocità del fiume reciproche de' seni dell' inclinazione di tali ostacoli, o in parità d' inclinazione, siano le lunghezze loro reciproche a' quadrati delle velocità: o insomma se le lunghezze siano reciproche a' prodotti de' quadrati delle velocità ne' quadrati de' seni; ovvero i quadrati de' seni siano reciproci de' prodotti delle lunghezze ne' quadrati delle velocità, o finalmente i quadrati delle velocità reciprochi de' prodotti delle lunghezze ne' quadrati de' seni delle loro inclinazioni.

PROPOSIZIONE XLIV.

Volendo fare conto dell' impressione secondo R D parallela alla direzione del fiume, la quale secondo lo Scolio 1. della prop. 41. derivasi dall' impressione fatta dall' acqua corrente sopra l' ostacolo D F, secondo la perpendicolare H D; saranno le impressioni sopra l' ostacolo C D, opposto direttamente al corso dell' acqua, e sopra l' eguale ostacolo D F inclinato, secondo l' angolo A D F, il cui seno A I, come il cubo del seno totale A D, al cubo del seno A I della sua inclinazione.

Perchè l'impressione sopra D C a quella sopra D F, secondo la direzione A I, ovvero H D perpendicolare ad esso piano D F, sta per la Prop. 41 come il quadrato A D al quadrato A I; ma l'impressione sopra D F secondo la perpendicolare H D, a quella che ne risulta secondo la direzione R D, sta come H D ad R D, cioè come A D a D H, ovvero A D ad A I; dunque l'impressione sopra C D, a quella sopra D F, secondo la direzione R D, sarà in ragione composta di quella del quadrato A D al quadrato A I, e di nuovo di quella di A D ad A I; cioè sta, come il cubo A D al cubo A I: il che ec.

Corollario I.

Quindi facilmente si deduce, che l'impressioni secondo la stessa direzione R D sopra due ostacoli eguali D F, D T variamente inclinati, sono in triplicata ragione de' seni delle loro inclinazioni, cioè come i cubi di A I, e di A X.

Corollario II.

Attesa la detta direzione R D, due ripari diversamente lunghi, e variamente inclinati, riceveranno dall'acqua le impressioni in ragione composta delle loro lunghezze, e de' cubi fatti da' seni delle inclinazioni.

Corollario III.

Et essendo i cubi de i seni dell'inclinazioni, reciprochi delle lunghezze de' ripari, saranno eguali le impressioni fatte sopra di essi per la detta direzione R D.

Corollario IV.

E variando ancora la velocità, le dette impressioni saranno in ragione composta della semplice delle lunghezze, della duplicata delle velocità, e della triplicata de' seni dell'inclinazioni loro.

PROPOSIZIONE XLV.

L' impressione fatta dall' acqua sopra un ostacolo rettilineo A G opposto direttamente al corso dell' acqua in qualunque suo punto G, sta all' impressione fatta nell' ostacolo retto, o curvo A F inclinato alla corrente, nel punto F, che corrisponde al punto G, considerando l' urto ricevuto secondo la perpendicolare F C, come la normale C I alla sunnormale C B, o come la tangente D F all' ordinata F B: ma secondo la direzione F I derivata dall' urto suddetto per F C, sarà in duplicata ragione delle medesime normale, e sunnormale, ovvero tangente, ed ordinata: cioè come il quadrato F C al quadrato C B, o come il quadrato D F al quadrato F B.

Sia F f una parte infinitamente piccola della linea retta, o curva F A, la quale sia

ſia urtata da' fili d'acqua H F, *h f* parallela alla ripa A C, che battono perpendicolarmente ne' punti G, *g* della retta A G perpendicolare al corſo del fiume; e fingaſi, che la ſteſſa particella F*f* fuſſe urtata perpendicolarmente, colla ſteſſa velocità, da' fili d'acqua E F, *e f*. Sarà l'impreſſione fatta da' fili H G; *h g* ſopra G *g*, a quella fatta colla ſteſſa velocità, ed inclinazione da' fili F E, *e f* ſopra F *f*, per la Prop. 42. come G *g* ad F *f*, ovvero G N, ad F N [poſta F N tangente] o come la ſunnormale B C alla normale C F; cioè come il rettangolo B C F al quadrato C F, ma l'impreſſione de' fili perpendicolari E F, *e f* ſopra F *f*, a quella de' fili H F, *h f* ſopra la medeſima F *f* cadenti obliquamente, per la prop. 41. è come il quadrato F M del ſeno totale al quadrato M L del ſeno dell' inclinazione, cioè come il quadrato C F al quadrato C B; dunque l'impreſſione de' fili H F, *h f* ſopra G *g*, a quella fatta da' medeſimi ſopra F *f*, cioè l'impreſſione dell' acqua nel punto G della retta A G, che ne ſoſtiene l'urto perpendicolarmente, all' impreſſione di eſſa nel punto corriſpondente F della linea retta, o curva A F, ſarà per l'egualità ordinata, come il rettangolo B C F al quadrato C B, o come la normale F C alla ſunnormale C B, ovvero come la tangente F D all' ordinata F B, preſa la detta impreſſione ſecondo la direzione F C perpendicolare in F alla linea A F: ma volendo conſiderare quella ſolamente, che le viene derivata ſecondo la ſteſſa direzione H F I, ſecondo cui ſi muove l'acqua; perchè la impreſſione de' fili d'acqua H F, *h f*, che urtano nella ſteſſa F *f* obliquamente, conſiderandola ſecondo la direzione H F I ſta, per la prop. 44., come il cubo del ſeno totale F C al cubo del ſeno dell' inclinazione C B; eſſendo l'impreſſione ſopra G g da' fili H G, *h g*, a quella ſopra F *f* da' fili E F, *e f*, come il rettangolo B C F al quadrato C F (il che poc'anzi ſi è qui dimoſtrato) o come il prodotto di B C nel quadrato C F al cubo C F, ſarà per l'ugual proporzione l'impreſſione fatta da' fili H G, *g h* ſopra G *g*, a quella che è fatta da' medeſimi prolungati in F, *f* ſopra F *f*, ſecondo la direzione G F I, come il prodotto di B C nel quadrato C F, al cubo B C: cioè come il quadrato C F al quadrato B C; ovvero come il quadrato della tangente F D al quadrato dell' ordinata F B; il che era da dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE XLVI.

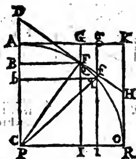
Facendosi, come la normale F C alla sunnormale C B così la retta costante G I ad un' altra I Q, e così sempre in tutti i punti, sicchè ne nasca la curva A Q O, sarà tutta l' impressione sopra la retta A K fatta dall' acqua, che gli urta dentro perpendicolarmente, all' impressione fatta sopra tutta la curva A F R, considerata secondo le direzioni F C perpendicolari alla curva in ciascun punto, come il rettangolo A K R P allo spazio curvilineo A Q O R P: ma la medesima impressione sopra la retta A K sta all' impressione ricevuta dalla curva A F R secondo le direzioni G F parallele alla ripa A P, come il cilindro generato dal detto rettangolo A K R P rivoltato intorno la base P R, al solido rotondo nato dalla rivoluzione dello spazio curvilineo A Q O R P intorno la stessa base R P.

Perchè l' impressione dell' acqua sopra la linea A K nel punto G, all' impressione sopra la linea A F R nel punto F, secondo la direzione F C perpendicolare alla curva, sta come F C a C B per la prop. precedente ovvero come G I ad I Q; e sono tutte l' impressioni ne' punti G della retta A K tra di loro eguali, siccome sono eguali tutte le linee G I tirate nel rettangolo A K R P parallele ad A P; dunque la somma di tutte l' impressioni fatte su ciascun punto della retta A K stanno alla somma di tutte l' impressioni fatte su ciascun punto della A F R, per le direzioni perpendicolari a qualunque parte di essa, come tutte le linee G I del rettangolo A K R P, a tutte le linee I Q dello spazio A Q O R P, cioè come il detto rettangolo alla figura stessa A Q O R P; ma le impressioni sopra i punti G della retta, paragonate all' impressioni sopra i punti F della suddetta curva, secondo le direzioni parallele ad A P, essendo per l' antecedente proposizione, come i quadrati delle normali corrispondenti F C a' quadrati delle sunnormali C B, o come li quadrati G I a' quadrati delle I Q, cioè come li cerchi generati dalle rette G I rivoltate intorno l' asse R P, a' cerchi generati dalle rette I Q similmente rivoltate intorno R P, ne segue, che la somma di tutte le impressioni sopra la retta A K, alla somma delle impressioni sopra la curva A F R, secondo la direzione G I, sia come il cilindro fatto dal rettangolo A K R P rivoltato intorno R P, al solido rotondo fatto dallo spazio A Q O R P rivoltato similmente intorno R P; il che ec.

Co-

Corollario I.

Se la curva A F R sarà un quarto di circolo, le cui normali F C convengono nel centro C, la curva A Q O sarà lo stesso arco del quadrante; perchè facendo, come F C a C B, così G I, ad I Q, siccome G I è sempre eguale ad F C, così la I Q sempre sarà eguale alla C B, ovvero alla I F; onde l'impressione sopra la retta A K, all'impressione fatta dalla stessa acqua sopra il quadrante circolare A F R, in quanto è secondo le perpendicolari ad esso quadrante, cioè diretta verso il centro C, starà come A K R C quadrato del raggio allo stesso quadrante circolare A F R C, ovvero come il quadrato al cerchio iscritto; ma presa questa seconda impressione in quanto diretta per le G I parallele alla ripa A C, sarà la prima impressione alla seconda in ragione sesquialtera, essendo come il cilindro generato dal quadrato A K R C all' emisfero fatto dal quadrante A R C girato intorno R C.



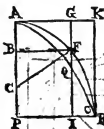
Corollario II.

Similmente paragonando l' impressione sulla retta G A a quella sull'arco A F, starà come il rettangolo G A C I allo spazio circolare A F I C, quando si considera l'arco spinto secondo le sue perpendicolari convergenti nel centro: o pure; considerandolo spinto con direzione parallela alle ripe, sarà come il cilindro generato dal rettangolo G A C I girato intorno C I, alla porzione sferica descritta dallo spazio circolare A F I C similmente girato intorno la C I.

Corollario III.

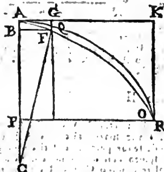
Se si tira nel quadrante un tale seno F I, il quadrato di cui sia duplo del quadrato I C, sarà il quadrato del seno totale P F sesquialtero del quadrato del seno suddetto F I, ovvero C B; e però condotta la tangente F D determinata in H dal lato R K del quadrato A K R C, l' impressione sopra la retta D H, riuscirà eguale all'impressione sopra l' arco del quadrante A F R, prendendo l' una e l' altra secondo la direzione G I; essendo che l' impressione sopra A K all' impressione sopra D H sarà altresì come il quadrato F C al quadrato C B, cioè in ragione sesquialtera, come è la ragione dell' impressione sopra A K all' impressione sopra l'arco suddetto A F R per la stessa direzione. Vi sarà però questo divario, che l' impressione su la retta D H sarà equabilmente distribuita per essa, essendo da per tutto eguale a quella, che nell'arco risulta al punto F; ma l'

impressione eguale fatta su l' arco A F R vi è distribuita disugualmente per le sue parti, riuscendo maggiore tra i punti F, A, e minore tra i punti F, R.



Corollario IV.

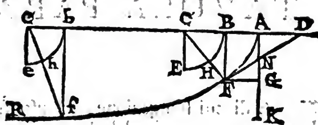
Se in vece del quadrante circolare, fusse A P R un quarto di ellisse, essendo A P il semiasse maggiore, l' impressione sopra la retta A K all' impressione sopra l' arco A F R secondo le perpendicolari F C sarebbe in ragione maggiore che quella del quadrato all' iscritto cerchio; e secondo le direzioni parallele all' asse A P in maggior ragione che sesquialtera; ma quando *fig.* 2. fusse A P il semiasse minore, sarebbe la prima ragione minore di quella del quadrato al cerchio iscritto, e la seconda minore parimente della sesquialtera, riuscendo la linea A Q O interiore all' ellisse nel primo caso, ed esteriore nel secondo.



SCOLIO.

Non mi diffondo in dimostrare questo corollario, siccome nè meno nell' esaminare ciò che accade all' altre sezioni coniche, e diverse altre curve già note, bastando, che siasi spianata la strada a' Lettori per simiglianti ricerche: solamente noterò di passaggio, che la proporzione dell' impressione sopra una retta parallela all' asse d' una parabola, quando il corso del fiume è parallelo all' ordinate, e questa si considera secondo la direzione del medesimo corso, sta come uno spazio rettilineo ad uno spazio iperbolico tagliato con parallele a gli asintoti; e l' impressione sopra una retta parallela all' ordinate all' impressione sopra la curva parabolica, essendo il corso del fiume parallelo all' asse della parabola, considerata questa impressione nella perpendicolare alla curva, sta come uno spazio rettilineo ad un settore iperbolico; ma considerandola nella stessa direzione del fiume, sta come la retta, sopra cui si fa l' impressione, all' arco circolare, il cui raggio sia la metà del lato retto, e l' angolo al centro sia, quanta è l' inclinazione della tangente coll' estrema ordinata, che termina l' arco parabolico; ovvero come la tangente del compimento dell' inclinazione sta all' arco cioè l' impressione sopra A G, all' impressione sopra A F (descritto l' arco circolare B H, col raggio della sunnormale B C, che è la metà del lato retto, il quale arco sia segato in H della normale F C, che fa coll' asse l' angolo F C B eguale a quello della tangente, e dell' ordinata D F B) come la stessa retta A G all' arco B H; onde compiuto il quadrante circolare B H E, ne segue questo stupen-

pendo paradosso, che prolungata quantosivoglia la parabola A F verso R, non cresce in infinito l'impressione sopra di essa, non potendo l'arco B H mai talmente crescere, col crescere dell'angolo F C B contenuto dalla normale, e dalla sunnormale, che possa giugnere all' intiero quadrante B



E; e però presa A K eguale al quadrante B H E, saremo certi, che prolungandosi quantosivoglia la parabola A F R, l'impressione totale sopra di essa, secondo le direzioni parallele all'asse, mai non arriverà, non che possa passare la somma dell'impressioni fatte sopra la detta A K. Se la figura del riparo sarà cicloidale, ed il corso del fiume sia parallelo alla base, l'impressione sopra la retta parallela all'asse a quella, che riceve la cicloide secondo le perpendicolari alla sua curvità, sarà in ragione sesquialtera, ed a quella che ne partecipa secondo il corso del fiume, in ragione dupla. Ma essendo il corso del fiume parallelo all'asse della cicloide, l'impressione sopra la retta parallela alla base, all'impressione su l'arco cicloidale, secondo la stessa direzione del fiume, sarà in ragione sesquiterza, e secondo la direzione delle sue perpendicolari, in ragione minore che sesquiterza. Se la curva sarà una logaritmica, ed il corso dell'acqua sia parallelo al suo asintoto, l'impressione sopra di essa, presa nella direzione parallela all'asse, sta all'impressione sopra la sua prima ordinata eguale alla suttangente, come l'eccesso del quadrato sopra il circolo iscritto, sta ad esso quadrato; ovvero generalmente, l'impressione sopra un' ordinata, sta all'impressione sopra tutta la logaritmica quindi in infinito decrescente, come la tangente all'eccesso di essa sopra l'arco, che misura l'inclinazione di essa tangente coll'asse. E se la curva sarà una trattoria, sarà l'impressione sopra la retta finita eguale alla sua suttangente, ed ordinata alla curva, il cui asintoto sia parallelo al corso del fiume, all'impressione sopra la detta curva in infinito prolungata, presa però secondo le perpendicolari alla medesima curva, in ragione dupla; e prendendo detta impressione, secondo le parallele all'asse, sarà in ragione tripla; le quali proprietà, ed altre infinite, io non intraprendo a dimostrare, perchè chi è abile Geometra averà maggior piacere di rinvenirle da se medesimo, e chi non è tale, o non si curerebbe ad ogni modo di leggerle, o difficilmente ne capirebbe la dimostrazione. Che però questo basti per ora di avere brevemente notato sopra questa materia.

TAVOLA PARABOLICA.

LA di cui ſpiegazione, ed uſo ſi vede nella Propoſizione XXXVII. del Libro II., calcolata fino in 1800. particelle eguali d'altezza, le quali poſſono ſignificare indifferentemente once, o ſoldi, o altre minime miſure, ſecondo che vorranno miſurarſi le altezze con piedi, che ſi dividono in 12. once, o con braccia, che ſi dividono in 20. ſoldi, o con altre miſure ſecondo l'uſanza di ciaſcun paeſe. A ciaſcun' *altezza* corriſponde la ſua *radice quadra* eſatta, o proſſima in numeri interi, e parti centeſime anneſſe, ſeparate da un punto; le quali radici eſprimono ancora le *velocità* competenti all' acqua nelle date altezze, o pure le *ordinate* della parabola, che eſprime la ſcala delle velocità; e nella terza colonna ſi ha il *prodotto* di ciaſcuna altezza nella ſua radice quadra, che eſprime la *quantità dell' acqua* corriſpondente, ovvero la *ſuperficie* medeſima parabolica, a cui il detto prodotto è proporzionale, per eſſere quella ſempre due terzi del rettangolo circoſcritto; come ſi è avviſato di ſopra nel luogo citato.

Al-

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1.	1.00.	1.00.
	2.	-1.41.	2.82.
	3.	-1.73.	5.19.
	4.	-2.00.	8.00.
	5.	+2.24.	11.20.
	6.	+2.45.	14.70.
	7.	+2.65.	19.55.
	8.	+2.83.	22.64.
	9.	3.00.	27.00.
	10.	-3.16.	31.60.
	11.	+3.32.	36.52.
	12.	-3.46.	41.52.
Pie.) di 1.)			
	13.	+3.61.	46.93.
	14.	-3.74.	52.36.
	15.	-3.87.	56.05.
	16.	4.00.	64.00.
	17.	-4.12.	70.04.
	18.	-4.24.	76.32.
	19.	+4.36.	82.84.
	20.	-4.47.	89.40.
Brac-) cia 1.)			
	21.	-4.58.	96.18.
	22.	-4.69.	103.18.
	23.	+4.80.	110.40.
	24.	+4.90.	117.60.
P.2.			
	25.	5.00.	125.00.
	26.	+5.10.	132.60.
	27.	+5.20.	140.40.
	28.	-5.29.	148.12.
	29.	-5.39.	156.31.
	30.	+5.48.	164.40.
	31.	+5.57.	172.67.
	32.	+5.66.	181.12.
	33.	+5.74.	189.42.
	34.	-5.83.	198.22.
	35.	+5.92.	207.20.
	36.	6.00.	216.00.
P.3.			
	37.	-6.08.	224.96.
	38.	-6.16.	234.08.
	39.	-6.24.	243.36.
	40.	-6.32.	252.80.
B.2.			
	41.	-6.40.	262.40.
	42.	-6.48.	272.16.
	43.	+6.56.	282.08.
	44.	-6.63.	291.72.
	45.	+6.71.	301.95.
	46.	-6.78.	311.88.
	47.	+6.86.	322.42.
	48.	+6.93.	332.64.
P.4.			
	49.	7.00.	343.00.
	50.	-7.07.	353.50.
	51.	-7.14.	364.14.
	52.	-7.21.	374.92.
	53.	-7.28.	385.84.
	54.	+7.35.	306.90.
	55.	+7.42.	408.10.
	56.	-7.48.	418.88.
	57.	+7.55.	430.35.
	58.	+7.62.	441.96.
	59.	-7.68.	453.12.
	60.	+7.75.	465.00.
P.5.) B.3.)			
	61.	-7.81.	476.41.
	62.	-7.87.	487.94.
	63.	+7.94.	500.22.
	64.	8.00.	512.00.
	65.	-8.06.	523.90.
	66.	-8.12.	535.92.
	67.	+8.19.	548.73.
	68.	-8.24.	560.32.
	69.	+8.31.	573.39.
	70.	+8.37.	585.90.
	71.	+8.43.	598.53.
	72.	+8.49.	611.28.
P.6.			
	73.	-8.54.	623.42.
	74.	-8.60.	636.40.
	75.	-8.66.	649.50.
	76.	+8.72.	662.72.
	77.	-8.77.	675.99.
	78.	-8.83.	688.74.
	79.	+8.89.	702.31.
	80.	-8.94.	715.20.
B.4.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	81.	9.00.	729.00.
	82.	+9.06.	742.92.
	83.	-9.11.	756.13.
	84.	+9.17.	770.28.
P.7.			
	85.	+9.22.	783. 70.
	86.	-9.27.	797.22.
	87.	+9.33.	811.71.
	88.	-9.38.	825.44.
	89.	-9.43.	839.27.
	90.	+9.49.	854.10.
	91.	+9.54.	868.14.
	92.	-9.59	882.28.
	93.	-9.64.	896.52.
	94.	+9.70.	911.80.
	95.	+9.75.	926.25.
	96.	+9.80.	940.80.
P.8.			
	97.	+9.85.	955.45.
	98.	+9.90.	970.20.
	99.	+9.95.	985.05.
	100.	10.00.	1000.00.
B.5.			
	101.	+10.05.	1015.05.
	102.	+10.10.	1030.20.
	103.	+10.15.	1045.45.
	104.	+10.20.	1060.80.
	105.	+10.25.	1076 25.
	106.	+10.30.	1091.80.
	107.	-10.34.	1106.38.
	108.	-10.39.	1122.12.
P.9.			
	109.	-10.44.	1137.96.
	110.	+10.49.	1153.9 .
	111.	+10.54.	1169.94.
	112.	-10.58.	1184.96.
	113.	-10.63.	1201.19.
	114.	+10.68.	1217.52.
	115.	-10.72.	1232.80.
	116.	-10.77.	1249.32.
	117.	+10.82.	1265.94.
	118.	-10.86.	1281.48.
	119.	+10.91.	1298.29.
	120.	-10.95.	1314.00.
P.10. B.6.			
	121.	11.00.	1331.00.
	122.	+11.05.	1348.10.
	123.	+11.09.	1364.07.
	124.	+11.14.	1381.36.
	125.	-11.18.	1397.50.
	126.	-11.22.	1413.72.
	127.	+11.27.	1431.29.
	128.	-11.31.	1447.68.
	129.	+11.36.	1465.44.
	130.	-11.40.	1482.00.
	131.	+11.45.	1499.95.
	132.	11.49.	1516.68.
P.11.			
	133.	-11.53.	1533.49.
	134.	+11.58.	1551.72.
	135.	+11.63.	1568.70.
	136.	-11.66.	1585.76.
	137.	+11.70.	1602.90.
	138.	+11.75.	1621.50.
	139.	+11.79.	1638.81.
	140.	-11.83.	1656.20.
B.7.			
	141.	-11.87.	1673.67.
	142.	+11.92.	1692.64.
	143.	+11.96.	1710.28.
	144.	12.00.	1728.00.
P.12.			
	145.	-12.04.	1745.80.
	146.	-12.08.	1763.68.
	147.	-12.12.	1781.64.
	148.	+2.17	1801.16.
	149.	+12.21.	1819.29.
	150.	+12.25.	1837.50.
	151.	+12.29.	1855.79.
	152.	+12.33.	1874.16.
	153.	+12.37.	1892.61.
	154.	+12.41.	1911.14.
	155.	+12.45.	1929.75.
	156.	+12.49.	1948.44.
P.13.			
	157.	+12.53.	1967.21.
	158.	+12.57.	1986.06.
	159.	+12.61	2004.99.
	160.	+12.65.	2024.00.
B.8.			

Al.

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	161.	+12.69.	2043.09.
	162.	+12.73.	2062.26.
	163.	+12.77.	2081.51.
	164.	+12.81.	2100.84.
	165.	+12.85.	2120.25.
	166.	-12.88.	2138.08.
	167.	-12.92.	2157.64.
	168.	-12.96.	2177.28.
P.14.			
	169.	13.00.	2197.00.
	170.	+13.04.	2216.80.
	171.	+13.08.	2236.68.
	172.	-13.11.	2254.92.
	173.	-13.15.	2274.95
	174.	-13.19.	2295.06
	175.	+13.23.	2315.25
	176.	+13.27.	2335.52.
	177.	-13.30.	2354.10.
	178.	-13.34.	2374.52.
	179.	+13.38.	2395.02.
	180.	+13.42.	2415.60.
P.15. B. 9.			
	181.	-13.45.	2434.45.
	182.	-13.49.	2455.18.
	183.	+13.53.	2475.97.
	184.	+13.56.	2495.04.
	185.	-13.60.	2516.00.
	186.	+13.64.	2537.04.
	187.	-13.67.	2556.29.
	188.	-13.71.	2577.48.
	189.	+13.75.	2598.75.
	190.	-13.78.	2618.20.
	191.	-13.82.	2639.62.
	192.	+13.86.	2661.12.
P.16.			
	193.	-13.89.	2680.77.
	194.	+13.93.	2702.42.
	195.	-13.96.	2734.20.
	196.	14.00.	2744.00.
	197.	+14.04.	2765.88.
	198.	+14.07.	2785.86.
	109.	+14.11.	2807.89.
	200.	-14.14.	2828.00.
B.10.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	201.	-14.18.	2850.18.
	202.	-14.21.	2870.42.
	203.	-14.25.	2892.75.
	204.	-14.28.	2913.12.
P.17.			
	205.	+14.32.	2935.60.
	206.	-14.35.	2956.10.
	207.	+14.39.	2978.73.
	208.	-14.42.	2999.36.
	209.	+14.46.	3022.14.
	210.	-14.49.	3042.90.
	211.	+14.53.	3065.83.
	212.	-14.56.	3086.72.
	213.	-14.59.	3107.67.
	214.	+14.63.	3130.82.
	215.	-14.66.	3151.90.
	216.	+14.70.	3175.20.
P.18.			
	217.	-14.73.	3196.41.
	218.	-14.76.	3217.68.
	219.	+14.80.	3241.20.
	220.	-14.83.	3262.60.
B.11.			
	221.	+14.87.	3286.27.
	222.	+14.90.	3307.80.
	223.	-14.93.	3329.39.
	224.	+14.97.	3353.28.
	225.	15.00.	3375.00.
	226.	-15.03.	3396.78.
	227.	+15.07.	3420.89.
	228.	+15.10.	3442.80.
P.19.			
	229.	-15.13.	3464.77.
	230.	+15.17.	3489.10.
	231.	+15.20.	3511.20.
	232.	-15.23.	3533.36.
	233.	-15.26.	3555.58.
	234.	+15.30.	3580.20.
	235.	+15.33.	3602.55.
	236.	-15.36.	3624.96.
	237.	-15.39.	3647.43.
	238.	+15.43.	3672.34.
	239.	+15.46.	3694.94.
	240.	-15.49.	3717.60.
P.20. B.12.			

Al-

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	241.	-15.52.	3740.32.
	242.	+15.56.	3765.52.
	243.	+15.59.	3788.37.
	244.	-15.62.	3811.28.
	245.	-15.65.	3834.25.
	246.	-15.68.	3857.28.
	247.	+15.72.	3882.84.
	248.	+15.75.	3906.00.
	249.	+15.78.	3929.22.
	250.	-15.81.	3952.50.
	251.	-15.84.	3975.84.
	252.	+15.88.	4001.76.
P.21.			
	253.	+15.91.	4025.23.
	254.	+15.94.	4048.76.
	255.	+15.97.	4072.35.
	256.	16.00.	4096.00.
	257.	-16.03.	4119.71.
	258.	-16.06.	4143.48.
	259.	-16.09.	4167.31.
	260.	-16.12.	4191.20.
B.13.			
	261.	+16.16	4217.76.
	262.	+16.19.	4241.78.
	263.	+16.22.	4265.86.
	264.	+16.25.	4290.00.
P.22.			
	265.	+16.28.	4314.20.
	266	-16.30.	4335.80.
	267.	-16.34.	4362.78.
	268.	-16.37	4387.16.
	269.	-16.40.	4411.60.
	270.	-16.43.	4436.10.
	271.	-16.46.	4460.66.
	272.	-16.49.	4485.28.
	273.	-16.52.	4509.96.
	274.	-16.55.	4534.70.
	275.	-16.58.	4559.50.
	276.	-16.61.	4584.36
P.23.			
	277.	-16.64.	4609.28.
	278.	-16.67.	4634.26.
	279.	-16.70.	4659.30.
	280.	-16.73.	4684.40.
B.14.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	281.	-16.76.	4709.56.
	282.	-16.79.	4734.78.
	283.	-16.82.	4760.06.
	284.	-16.85.	4785.40.
	285.	-16.88.	4810.80.
	286.	-16.91.	4836.26.
	287.	-16.94	4861.78.
	288.	-16.97.	4887.36.
P.24.			
	289.	17.00.	4913.00.
	290.	+17.03.	4938.70.
	291.	+17.06.	4964.46.
	292.	+17.09.	4990.28.
	293.	+17.12.	5016.16.
	294.	+17.15.	5042.10.
	295.	+17.18.	5068.10.
	296.	+17.20.	5091.20.
	297.	-17.23	5117.31.
	298.	-17.26.	5143.48.
	299.	-17.29.	5169.71.
	300.	-17.32.	5196.00.
P.25. B.15.			
	301.	+17.35.	5222.35.
	302.	+17.38.	5248.76.
	303.	+17.41.	5275.23.
	304.	+17.44.	5301.76.
	305.	-17.46.	5325.30.
	306.	-17.49.	5351.94.
	307.	-17.52.	5378.64.
	308.	+17.55.	5405.40.
	309.	+17.58.	5432.22.
	310.	+17.61.	5459.10.
	311.	+17.64.	5486.04.
	312.	-17.66.	5509.92.
P.26.			
	313.	-17.69.	5536.97.
	314.	-17.73.	5567.22.
	315.	+17.75.	5591.25.
	316.	+17.78.	5618.48.
	317.	-17.80.	5642.60.
	318.	-17.83.	5669.94.
	319.	-17.86.	5697.34.
	320.	+17.89.	5724.80.
B.16.			

Al-

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	321.	+17.92.	5752.32.
	322.	-17.94.	5776.68.
	323.	-17.97.	5804.31.
	324.	18.00.	5832.00.
P.27.			
	325.	+18.03.	5859.75.
	326.	+18.06.	5887.50.
	327.	-18.08.	5912.16.
	328.	--18.11.	5940.08.
	329.	+18.14.	5968.06.
	330.	+18.17.	5996.10.
	331.	-18.19.	6020.89.
	332.	-18.22.	6049.04.
	333.	+18.25.	6077.25.
	334.	+18.27.	6102.18.
	335.	-18.30.	6130.50.
	336.	-18.33.	6158.88.
P.28.			
	337.	+18.36.	6187.32.
	338.	+18.38.	6212.44.
	339.	-18:41.	6240.99.
	340.	+18.44.	6269.60.
B.17.			
	341.	+18.47.	6298.27.
	342.	-18.49.	6323.58.
	343.	-18.52.	6352.36.
	344.	+18.55.	6381.20.
	345.	-18.57.	6406.65.
	346.	-18.60.	6435.60.
	347.	+18.63.	6464.61.
	348.	-18.65.	6490.20.
P.29.			
	349.	-18.68.	6519.32.
	350.	+18.71.	6548.50.
	351.	+18.74.	6577.74.
	352.	-18.76.	6603.52.
	353.	+18.79.	6632.87.
	354.	+18.82.	6662.28.
	355.	-18.84.	6688.20.
	356.	+18.87.	6717.72.
	357.	-18.89.	6743.73.
	358.	-18.92.	6773.36.
	359.	+18.95.	6803.05.
	360.	-18.97.	6829.20.
P.30. B.18.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	361.	19.00.	6859.00.
	362.	+19.03	6892.46.
	363.	-19.05.	6918.75.
	364.	+19.08.	6948.72.
	365.	-19.10.	6975.10
	366.	-19.13.	7001.58
	367.	+19.16.	7031.72
	368.	-19.18.	7058.24
	369.	+19.21.	7088.49.
	370.	+19.24.	7118.80.
	371.	-19.26.	7145.46.
	372.	+19.29.	7175.88.
P.31.			
	373.	-19.31.	7202.63.
	374.	+19.34.	7233.16.
	375.	+19.37.	7263.75.
	376.	-19.39.	7290.64.
	377.	+19.42.	7321.34.
	378.	-19.44.	7348.32.
	379.	+19.47.	7379.13.
	380	-19.49.	7406.20.
B.19.			
	381.	+19.52.	7437.12.
	382.	-19.54	7464.28.
	383.	-19.57.	7405.31.
	384.	+19.60.	7526.40.
P.32.			
	385.	-19.62.	7553.70.
	386.	+19.65.	7584.90.
	387.	-19.67.	7612.29.
	388.	-19.69.	7639.72.
	389.	+19.72.	7671.08.
	390.	+19.75.	7702.50.
	391.	-19.77.	7730.07.
	392.	+19.80.	7761.60.
	393.	-19.82.	7789.26.
	394.	+19.85.	7820.90.
	395.	-19.87.	7848.65.
	396.	+19.90.	7880.40.
P.33.			
	397	-19.92.	7908.24.
	398.	+19.95.	7940.10.
	399.	-19.97.	7968.03.
	400.	20.00.	8000.00.
B.20.			

Al-

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	401.	- 20.02.	8028.02.
	402.	+20.05.	8060.10.
	403.	- 20.07.	8088.21.
	404.	+20.10.	8120.40.
	405.	- 20.12.	8148.60.
	406.	+20.15.	8180.90.
	407.	- 20.17.	8209.19.
	408.	+20.20.	8241.60.
P.34.			
	409.	- 20.22.	8269.98.
	410.	+20.25.	8302.50.
	411.	- 20.27.	8330.97.
	412.	+20.30.	8363.60.
	413.	- 20.32.	8392.16.
	414.	+20.35.	8424.90.
	415.	- 20.37.	8453.55.
	416.	+20.40.	8486.40.
	417.	- 20.42.	8515.14.
	418.	+20.45.	8548.10.
	419.	+20.47.	8576.93.
	420.	- 20.49.	8605.80.
P.35. B.21.			
	421.	+20.52.	8638.92.
	422.	- 20.54.	8667.88.
	423.	+20.57.	8701.11.
	424.	- 20.59.	8730.16.
	425.	+20.62.	8763.50.
	426.	+20.64.	8792.64.
	427.	- 20.66.	8821.82.
	428.	+20.69.	8855.32.
	429.	- 20.71.	8884.59.
	430.	+20.74	8918.20.
	431.	- 20.76.	8947.56.
	432.	- 20.78.	8976.96.
P.36.			
	433.	+20.81.	9010.73.
	434.	- 20.83.	9040.22.
	435.	+20.86.	9074.10.
	436.	- 20.88.	9103.68.
	437.	- 20.90.	9133.30.
	438.	+20.93.	9167.34.
	439.	- 20.95.	9197.05.
	440.	+20.98.	9231.20.
B.22.			
	441.	21.00.	9261.00.
	442.	- 21.02.	9290.84.
	443.	+21.05.	9325.15.
	444.	- 21.07.	9355.08.
P.37.			
	445.	+21.10.	9389.50.
	446.	+21.12.	9419.52.
	447.	+21.14.	9449.58.
	448.	+21.17.	9484.16.
	449.	+21.19.	9514.31.
	450.	- 21.21.	9544.50.
	451.	+21.24.	9579.24.
	452.	- 21.26.	9609.52.
	453.	- 21.28.	9639.84.
	454.	+21.31.	9674.74.
	455.	- 21.33.	9705.15.
	456.	- 21.35.	9735.60.
P.38.			
	457.	+21.38.	9770.66.
	458.	- 21.40.	9801.20.
	459.	- 21.42.	9831.78.
	460.	+21.45.	9867.00.
B.23.			
	461.	- 21.47.	9897.67.
	462.	- 21.49	9928.38.
	463.	+21.52.	9963.76.
	464.	- 21.54.	9994.56.
	465.	- 21.56.	10025.40.
	466.	+21.59.	10060.94.
	467.	- 21.61.	10091.87.
	468.	- 21.63.	10122.84.
P.39.			
	469.	+21.66.	10158.54.
	470.	+21.68.	10189.60.
	471.	- 21.70.	10220.70.
	472.	+21.73.	10256.56.
	473.	+21.75.	10287.75.
	474.	- 21.77.	10318.98.
	475.	+21.79.	10350.25.
	476.	+21.82.	10386.32.
	477.	- 21.84.	10417.68.
	478.	- 21.86.	10449.08.
	479.	+21.80.	1048[illegible].31.
	480.	+21.91.	10516.80.
P.40. B.24.			

Al-

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	481.	-21.93.	10548.33.
	482.	-21.95.	10579.90.
	483.	+21.98.	10616.34.
	484.	22.00.	10648.00.
	485.	-22.02.	10679.70.
	486.	+22.05.	10716.30.
	487.	+22.07.	10748.09.
	488.	-22.09.	10779.92.
	489.	-22.11.	10811.79.
	490.	+22.14.	10848.60.
	491.	+22.16.	1088[illegible].56.
	492.	-22.18.	10912.56.
P.41.			
	493.	-22.20.	10944.60.
	494.	+22.23.	10981.62.
	495.	+22.25.	11013.75.
	496.	-22.27.	11045.92.
	497.	-22.29.	11078.13.
	498.	+22.32.	11115.36.
	499.	+22.34.	11147.66.
	500.	-22.36.	11180.00.
B.25.			
	501.	-22.38.	11212.38.
	502.	+22.41.	11249.82.
	503.	+22.43.	11282.29.
	504.	+22.45.	11314.80.
P.42.			
	505.	-22.47.	11345.35.
	506.	-22.49.	11379.94.
	507.	+22.52.	11417.64.
	508.	+22.54.	11450.32.
	509.	-22.56.	11483.04.
	510.	-22.58	11515.80.
	511.	+22.61.	11553.71.
	512.	+22.63.	11586.56.
	513.	+22.65.	11619.45.
	514.	-22.67.	11652.38.
	515.	-22.60.	11685.35.
	516.	[illegible]22.72.	11723.52.
P.43.			
	517.	+22.74.	11756.58.
	518.	+22.76.	11789.68.
	519.	-22.78.	11822.82.
	520.	-22.80.	11856.00.
B.26.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	521.	+22.8 .	11894.43.
	522.	+22.85.	11927.70.
	523.	+22.87.	11961.01.
	524.	-22.89.	11994.36.
	525.	-22.91.	12027.75.
	526.	-22.93.	12061.18.
	527.	+22.96.	12099.92.
	528.	+22.98.	12133.44.
P.44.			
	529.	23.00.	12167.00.
	530.	-23.02.	12200.60.
	531.	-23.04.	12234.24.
	532.	+23.07.	12273.24.
	533.	+23.09.	12306.97.
	534.	+23.11.	12340.74.
	535.	-23.13.	12374.55.
	536.	-23.15.	12408.40.
	537.	-23.17.	12442.29.
	538.	+23.20.	12481.60.
	539.	+23.22.	12515.58.
	540.	+23.24.	12549.60.
P.45.) B.27.)			
	541.	+23.26.	12583.66.
	542.	-23.28.	12617.76.
	543.	-23.30.	12651.90.
	544.	-23.32.	12686.08.
	545.	+23.35.	12725.75.
	546.	+23.37.	12760.02.
	547.	+23.39.	12794.33.
	548.	+23.41.	12828.68.
	549.	-23.43.	12863.07.
	550.	-23.45.	12897.50.
	551.	-23.47.	12931.97.
	552.	-23.49.	12966.48.
P.46.			
	553.	+23.52.	13006.56.
	554.	+23.54.	13041.16.
	555.	+23.56.	13075.80.
	556.	+23.58.	13110.48.
	557.	-23.60.	13145.20.
	558.	-23.62.	13179.96.
	559.	-23.64.	13214.76.
	560.	-23.66.	13249.60.
B.28.			

Al-

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	561.	+23.69.	13290.09.
	562.	+23.71.	13325.02.
	563.	+23.73.	13359.99.
	564.	+23.75.	13395.00.
P.47.			
	565.	+23.77.	13430.05.
	566.	-23.79.	13465.14.
	567.	-23.81.	13500.27.
	568.	-23.83.	13535.44.
	569.	-23.85.	13570.65.
	570.	-23.87.	13605.9[illegible].
	571.	+23.90	13646.90.
	572.	+23.92.	13682.24.
	573.	+23.94.	13717.62.
	574.	+23.96.	13753.04.
	575.	+23.98.	13788.50.
	576.	24.00.	13824.00.
P.48.			
	577.	-24.02.	13859.54.
	578.	-24.04.	13895.12.
	579.	-24.06.	13930.74.
	580.	-24.08.	13966.40.
B.29.			
	581.	-24.10.	14002.10.
	582.	-24.12.	14037.84.
	583.	+24.15.	14079.45.
	584.	+24.17.	14115.28.
	585	+24.19.	14151.15.
	586.	+24.21.	14187.06.
	587.	+24.23.	14223.01.
	588.	+24.25.	14259.00.
P.49.			
	589.	+24.27.	14295.03.
	590.	+24.29.	14331.10.
	591.	-24.31.	14367.21.
	592.	-24.33.	14403.36.
	593.	-24.35.	14439.55.
	594.	-24.37.	14475.78.
	595.	-24.39.	14512.05.
	596.	-24.41.	14548.36.
	597.	-24.43.	14584.71.
	598.	-24.45.	14621.10.
	599.	-24.47.	14657.53.
	600.	-24.49.	14694.00.
P.50. B.30.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	601.	+24.52.	14736.52.
	602.	+24.54.	14773.08.
	603.	+24.56.	14809.68.
	604.	+24.58.	14846.32.
	605.	+24.60.	14883.00.
	606.	+24.62.	14919.72.
	607.	+24.64.	14956.48.
	608.	+24.66.	14993.28.
	609.	+24.68.	15030.12.
	610.	+24.70.	15067.00.
	611.	+24.72.	15103.92.
	612.	+24.74.	15140.88.
B.51.			
	613.	+24.76.	15177.88.
	614.	+24.78.	15214.92.
	615.	+24.80.	15252.00.
	616.	+24.82.	15289.12.
	617	+24.84.	15326.28.
	618.	+24.86	15363.48.
	619.	+24.88.	15400.72.
	620.	+24.90.	15438.00.
B.31.			
	621.	+24.92.	15475.32.
	622.	+24.94.	15512.68.
	623.	+24.96.	15550.08.
	624.	+24.98.	15587.52.
P.52.			
	625.	25.00.	15625.00.
	626.	+25.02.	15662.52.
	627.	+25.04.	15700.08.
	628.	+25.06.	15737.68.
	629.	+25.08.	15775.22.
	630.	+25.10.	15813.00.
	631.	+25.12.	15850.72.
	632.	+25.14.	15888.48.
	633.	+25.16.	15926.28.
	634.	+25.18.	15964.12.
	635.	+25.20.	16002.00.
	636.	+25.22.	16039.92.
P.53.			
	637.	+25.24.	16077.88.
	638.	+25.26.	16115.88.
	639.	+25.28.	16153.92.
	640.	+25.30.	16192.00.
B.32.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	641.	+25. 32.	16230. 12.
	642.	+25. 34.	16268. 28.
	643.	+25. 36.	16306. 48.
	644.	+25. 38.	16344. 72.
	645.	+25. 40.	16383. 00.
	646.	+25. 42.	16421. 32.
	647.	+25. 44.	16459. 68.
	648.	+25. 46.	16498. 08.
P. 54.	649.	+25. 48.	16536. 52.
	650.	+25. 50.	16575. 00.
	651.	-25. 51.	16607. 01.
	652.	-25. 53.	16645. 56.
	653.	-25. 55.	16684. 15.
	654.	-25. 57.	16722. 78.
	655.	-25. 59.	16761. 45.
	656.	-25. 61.	16802. 16.
	657.	-25. 63.	16832. 91.
	658.	-25. 65.	16877. 70.
	659.	-25. 67.	16916. 53.
	660.	-25. 69.	16955. 40.
P. 55. B. 35.	661.	+25. 71.	16994. 31.
	662.	+25. 73.	17033. 26.
	663.	+25. 75.	17072. 25.
	664.	+25. 77.	17111. 28.
	665.	+25. 79.	17150. 35.
	666.	+25. 81.	17189. 46.
	667.	+25. 83.	17228. 61.
	668.	+25. 85.	17267. 80.
	669.	+25. 87.	17307. 03.
	670.	-25. 88.	17339. 60.
	671.	-25. 90.	17378. 90.
	672.	-25. 92.	17418. 24.
P. 56.	673.	-25. 94.	17457. 62.
	674.	-25. 96.	17497. 04.
	675.	-25. 98.	17536. 50.
	676.	25. 00.	17576. 00.
	677.	+26. 02.	17615. 54.
	678.	+26. 04.	17655. 12.
	679.	+26. 06.	17694. 74.
	680.	+26. 58.	17734. 40.
B. 34.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	681.	+26. 10.	17774. 10.
	682.	+26. 12.	17813. 84.
	683.	-26. 13.	17846. 79.
	684.	-26. 15.	17886. 60.
P. 57.	685.	-26. 17.	17926. 45.
	686.	-26. 19.	17966. 34.
	687.	-26. 21.	18006. 27.
	688.	+26. 23.	18046. 24.
	689.	+26. 25.	18086. 25.
	690.	+26. 27.	18126. 30.
	691.	+26. 29.	18166. 39.
	692.	+26. 31.	18206. 52.
	693.	-26. 32.	18239. 76.
	694.	-26. 34.	18279. 96.
	695.	-26. 36.	18320. 20.
	696.	-26. 38.	18360. 48.
P. 58.	697.	-26. 40.	18400. 80.
	698.	+26. 42.	18441. 16.
	699.	+26. 44.	18481. 56.
	700.	+26. 46.	18522. 00.
B. 35.	701	+26. 48.	18562. 48.
	702.	+26. 50.	18603. 00.
	703.	-26. 51.	186,6. 53.
	704.	-26. 53.	18677. 12.
	705.	-26. 55.	18717. 75.
	706.	-26. 57.	18758. 42.
	707.	+26. 59.	18799. 13.
	708.	+26. 61.	8839. 88.
P. 59.	709.	+26. 63.	18880. 67.
	710.	+26. 65	18921. 50.
	711.	-26. 66	18955. 26.
	712.	-26. 68.	18996. 16.
	713.	-26. 70.	19037. 10.
	714.	-26. 72.	19078. 08.
	715.	+26. 74.	19119. 10.
	716.	+26. 76.	19160. 16.
	717.	+26. 78.	19201. 26.
	718.	+26. 80.	19242. 40.
	719.	-26. 81.	19276. 39.
	720.	-26. 83.	19317. 60.
P. 60. B. 36.			

	Altezze.	*Raditi.*	*Prodotti.*
	721	-26.85.	19358.85.
	722.	-26.87.	19400.14.
	723.	+26.89.	19441.47.
	724.	+26.91.	19442.84.
	725.	+26.93.	19524.25.
	726.	-26.94.	19558.44.
	727.	-26.96.	19599.92.
	728.	-26.98.	19641.44.
	729.	27.50.	19683.00.
	730.	+27.02.	19724.60.
	731.	+27.04.	107 6.24.
P. 61.	732.	+27.06.	19807.92.
	733.	-27. 7.	19842.31.
	734.	-27.09.	19884.06.
	735	-27.11.	19925.85.
	736.	+27.13.	19967.68.
	737.	+27.15.	20009.55.
	738.	+27.17.	20051.46.
	739.	-27.18.	20086.02.
B. 37.	740.	-27.20.	20128.00.
	741.	-27.22	20170.02.
	742.	+27.24.	20212.08.
	743.	+27.26.	20254.18.
P. 62.	744.	+27.28.	20296.32.
	745.	-27.29.	20331.05.
	746.	-27.31.	20373.26.
	747.	-27.33.	20415.51.
	748.	+27.35.	20457.80.
	749.	+27.37.	20500.13.
	750.	+27.39.	20542.50.
	751.	-27.40.	20577.40.
	752.	-27.42.	20619.84.
	753.	-27.44.	20662.32.
	754.	+27.46.	20704.84.
	755.	+27.48.	20747.40.
P. 63.	756.	-27.49.	20782.44.
	757.	-27.51.	20825.07.
	758.	-27.53.	20867.74
	759.	+27.55.	20910.45.
B. 38.	760.	+27.57.	20953.20.

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	761.	+27.59.	20995.99.
	762.	-27.60.	21031.20.
	763.	-27.62.	21074.06.
	764.	-27.64.	21116.96.
	765.	+27.66.	21159.90.
	766.	+27.68.	21202.88.
	767.	-27.69.	21238.23.
P. 64.	768.	-27.71.	21281.28.
	769.	-27.73.	21324.37.
	770.	+27.75	21367.50.
	771	+27.77	21410.67.
	772.	+27.79.	21453.88.
	773.	-27.80.	21489.40.
	774.	-27.82.	21532.68.
	775.	+27.84.	21576.00.
	776.	+27.86.	21620.36.
	777.	-27.87.	21654.99.
	778.	-27.88.	21690.64.
	779.	-27.91.	21141.89.
P. 65. B. 39.	780.	+27.93.	21785.40.
	781.	+27.95.	21828.95.
	782.	-27.96.	21864.72.
	783.	-27.98.	21908.34.
	784.	28.00.	21952.00.
	785.	+28.02	21995.70.
	786.	+28.04.	22039.44.
	787.	+28.05.	22075.35.
	788.	-28.07.	22119.16.
	789.	+28.09.	22163.01.
	790.	+28.11.	22206.90.
	791.	-28.12.	22242.92.
P. 66.	792	-28.14.	22286.88.
	793.	-28.16.	22330.88.
	794.	+28.18.	22374.92.
	795.	+28.20.	22419 00.
	796.	-28.21.	22455.16.
	797.	-28.23.	22490.31.
	798.	+28.25.	22543.50.
	799.	+28.27	22587.73.
B. 40.	800.	-28.28.	22624.00.

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	801.	- 28. 30.	22668. 30.
	802.	+ 28. 32.	22712. 64.
	803.	+ 28. 34.	22757. 02.
	804.	- 28. 35.	22793. 40.
P.67.			
	805.	- 28. 37.	22831. 85.
	806.	- 28. 39.	22882. 34.
	807.	+ 28. 41.	22926. 87.
	808.	+ 28. 43.	22971. 44.
	809.	- 28. 44.	23007. 96.
	810.	- 28. 46.	23052. 60.
	811.	+ 28. 48.	23097. 28.
	812.	+ 28. 50.	23142. 00.
	813.	- 28. 51.	23178. 63.
	814.	- 28. 53.	23223. 42.
	815.	+ 28. 55.	23268. 25.
	816.	+ 28. 57.	23313. 12.
P.68.			
	817.	- 28. 58.	23349. 86.
	818.	- 28. 60.	23394. 80.
	819.	+ 28. 62.	23439. 78.
	820.	+ 28. 64.	23484. 80.
B.41.			
	821.	- 28. 65.	23521. 65.
	822.	- 28. 67.	23566. 74.
	823.	+ 28. 69.	23611. 87.
	824.	+ 28. 71.	23657. 04.
	825.	- 28. 72.	23694. 00.
	826.	- 28. 74.	23739. 24.
	827.	+ 28. 76.	23784. 52.
	828.	- 28. 77.	23821. 56.
P.69.			
	829.	- 28. 79.	23866. 91.
	830.	+ 28. 81.	23912. 30.
	831.	+ 28. 83.	23957. 73.
	832.	- 28. 84.	23994. 88.
	833.	+ 28. 86.	24040. 38.
	834.	+ 28. 88.	24085. 92.
	835.	+ 28. 90.	24131. 50.
	836.	- 28. 91.	24168. 76.
	837.	- 28. 93.	24214. 41.
	838.	+ 28. 95.	24260. 10.
	839.	+ 28. 97.	24305. 83.
P.70. B.42.	840.	- 28. 98.	24343. 20.

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	841.	29. 00.	24389. 00.
	842.	+ 29. 02.	24434. 84.
	843.	- 29. 03.	24472. 29.
	844.	- 29. 05.	24518. 20.
	845.	+ 29. 07.	24564. 15.
	846.	+ 29. 09.	24610. 14.
	847.	- 29. 10.	24647. 70.
	848.	- 29. 12.	24693. 76.
	849.	+ 29. 14	24739. 86.
	850.	- 29. 15.	24777. 50.
	851.	- 29. 17.	24823. 67.
	852.	+ 29. 19.	24869. 88.
P.71.			
	853.	+ 29. 21	24916. 13.
	854.	- 29. 22.	24953. 88.
	855.	- 29. 24.	25000. 20.
	856	+ 29. 26.	25046. 56.
	857.	- 29. 27.	25084. 39.
	858.	- 29. 29.	25130. 82.
	859.	+ 29. 31.	25177. 29.
	860.	+ 29. 33.	25223. 80.
B.43.			
	861.	- 29. 34.	25261. 74.
	862.	+ 29. 36.	25308. 32.
	863.	+ 29. 38.	25354. 94.
	864.	- 29. 39.	25392. 96.
P.72.			
	865.	- 29. 41.	25439. 65.
	866.	+ 29. 43.	25486. 38.
	867.	- 29. 44.	25524. 48.
	868.	- 29. 46.	25571. 28.
	869.	+ 29. 48.	25618. 12.
	870.	+ 29 50.	29665. 00.
	871.	- 29. 51.	25703. 21.
	872.	+ 29. 53.	25750. 16.
	873.	+ 29. 55.	25797. 15.
	874	- 29. 56.	29835. 44.
	875.	- 29. 58.	25882. 50.
	876.	+ 29. 60.	25929. 60.
P.73.			
	877	- 29. 61.	25967. 97.
	878.	- 29. 63.	26015. 14.
	879.	+ 29. 65.	26062. 35.
	880.	- 29. 66.	26100. 80.
B. 44.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	881.	- 29.68	26148.08.
	882.	+ 29.70.	26195.40.
	883.	+ 29.72.	26242.76.
	884.	- 29.73	26281.32.
	885.	+ 29.75.	26328.75.
	886.	+ 29.77.	26376.22.
	887.	- 29.78.	26414.86.
	888.	+ 29.80.	26462.40.
P.74.			
	889.	+ 29.82.	26509.98.
	890.	- 29.83	26548.70.
	891.	+ 29.85.	26596.35.
	892.	+ 29.87.	26644.04.
	893.	- 29.88.	2[illegible]682.84.
	894.	+ 29.90.	26730.60.
	8[illegible]5.	+ 29.92.	26778.40.
	896.	- 29.93.	26817.28.
	897.	+ 29.95	26865.15.
	898.	+ 29.96.	26904.08.
	899.	- 29.98.	26952.02.
P.75.) B.45.)	900.	30.00.	27000.00.
	901.	+ 30.02.	27048.02.
	902.	- 30.03.	27087.06.
	903.	+ 30.05	[illegible]7135.15.
	904.	+ 30.07.	[illegible]7183.28.
	90[illegible].	- 30.08.	27222.40.
	906.	+ 30.10.	27270.60.
	907.	+ 30.12.	27318.84.
	908.	- 30.13.	27358.04.
	909	+ 30.15.	27406.35.
	910.	+ 30.17.	27454.70.
	911	- 30.18.	27493.98.
	912.	+ 30.20.	27542.40.
P.76.			
	913.	+ 30.22.	27590.86.
	914.	- 30.23.	27630.22.
	915.	+ 30.25.	27678.75.
	916.	+ 30.27.	27727.32.
	917.	- 30.28.	27766.76.
	918.	+ 30.30.	27815.40.
	919	- 30.32.	27864.08.
	920.	- 30.33.	279[illegible]3.60.
P. 46.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	921.	+ 30.35.	27952.35.
	922.	- 30.36.	27991.92.
	923.	- 30.38.	28040.74.
	924.	+ 30.40.	28089.60.
P.77.			
	925.	- 30.41.	28129.25.
	926.	- 30.43.	28178.18.
	927.	+ 30.45	28227.15.
	928.	- 30.46.	28266.88.
	929.	+ 30.48.	28315.92.
	930.	+ 30.50.	28365.00.
	931.	- 30.51.	28404.87.
	932.	+ 30.53.	28453.96.
	933.	+ 30.55.	28503.15.
	934.	- 30.56.	28543.04.
	935.	+ 30.58.	28592.30.
	936.	- 30.59.	28632.24.
P.78.			
	937.	- 30.61.	28681.57.
	938.	+ 30.63.	28730.94.
	939.	- 30.64.	28770.96.
	940.	+ 30.66.	28820.40.
B.47.			
	941.	+ 30.68.	28869.88.
	942.	- 30.69.	28909.98.
	943.	+ 30.71.	28959.53.
	944.	- 30.72.	28999.68.
	945.	- 30.74.	29049.30.
	946.	+ 30.76.	29098.96.
	947.	- 30.77.	29139.19.
	948.	+ 30.79.	29188.92.
P.79.			
	949.	+ 30.81.	29238.69.
	950.	- 30.82.	29279.00.
	951.	+ 30.84.	29328.84.
	952.	- 30.85.	29369.20.
	953.	- 30.87.	29419.11.
	954.	+ 30.89.	29469.06.
	955.	- 30.90.	29509.05.
	956.	+ 30.92.	29559.52.
	957	+ 30.94.	29609.58.
	958.	- 30.95.	29650.10.
	959.	+ 30.97.	2970[illegible].23.
P.80.) B.48.)	960.	- 30.98.	29740.80.

Al

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	961.	31.00.	29791.00.
	962.	+31.02.	29841.24.
	963.	-31.03.	29881.89.
	964.	+31.05.	29932.20.
	965.	-31.06.	29972.90.
	966.	-31.08.	30023.28.
	967.	+31.10.	30073.70.
	968.	-31.11.	30114.48.
	969.	+31.13.	30164.97.
	970.	-31.14.	30205.80.
	971.	+31.16.	30256.36.
	972.	-31.17.	30297.24.
P.81.			
	973.	-31.19.	30347.87.
	974.	+31.21.	30398.54.
	975.	-31.22.	30439.50.
	976.	-31.24.	30490.24.
	977.	+31.26.	30541.02.
	978.	-31.27.	30582.06.
	979.	+31.29.	30632.91.
	980.	-31.30.	30674.00.
B. 9.			
	981.	-31.32.	30724.92.
	982.	+31.34.	30775.88.
	983.	-31.35.	30817.05.
	984.	+31.37.	30868.08.
P.82.			
	985.	-31.38.	30909.30.
	986.	-31.40.	30960.40.
	987.	+31.42.	31011.54.
	988.	-31.43.	31052.84.
	989.	+31.45.	31104.05.
	990.	-31.46.	31145.40.
	991.	-31.48.	31196.68.
	992.	+31.50.	31248.00.
	993.	-31.51.	31289.43.
	994.	+31.53.	31340.82.
	995.	-31.54.	31382.30.
	996.	+31.56.	31433.76.
P.83.			
	997.	+31.58.	31485.26.
	998.	-31.59.	31526.82.
	999.	+31.61.	31578.39.
	1000.	-31.62.	31620.00.
B.50.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1001.	+31.64.	31671.64.
	1002.	-31.65.	31713.30.
	1003.	-31.67.	31765.01.
	1004.	+31.69.	31816.76.
	1005.	-31.70.	31858.50.
	1006.	+31.72.	31910.32.
	1007.	-31.73.	31952.11.
	1008.	+31.75.	32004.00.
P.84.			
	1009.	-31.76.	32045.84.
	1010.	-31.78.	32097.80.
	1011.	+31.80.	32149.80.
	1012.	-31.81.	32191.72.
	1013.	-31.83.	32243.79.
	1014.	-31.84.	32285.76.
	1015.	+31.86.	32337.90.
	1016.	-31.87.	32379.92.
	1017.	-31.89.	32432.13.
	1018.	+31.91.	32484.38.
	1019.	-31.92.	32526.48.
	1020.	+31.94.	32578.80.
P.85.) B.51.)			
	1021.	-31.95.	32620.95.
	1022.	+31.97.	32673.34.
	1023.	-31.98.	32715.54.
	1024.	32.00.	32768.00.
	1025.	+32.02.	32820.50.
	1026.	-32.03.	32862.78.
	1027.	+32.05.	32915.35.
	1028.	-32.06.	32957.68.
	1029.	+32.08.	33010.32.
	1030.	-32.09.	33052.70.
	1031.	+32.11.	33105.41.
	1032.	-32.12.	33147.84.
P.86.			
	1033.	-32.14.	33200.62.
	1034.	+32.16.	33253.44.
	1035.	-32.17.	33295.95.
	1036.	+32.19.	33348.84.
	1037.	-32.20	33391.40.
	1038.	+32.22.	33444.36.
	1039.	-32.23.	33486.97.
	1040.	+32.25.	33540.00.
B.52.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1041.	- 32. 26.	33582. 66.
	1042.	- 32. 28.	33635. 76.
	1043.	+ 32. 30.	33688. 90.
	1044.	- 32. 31.	33731. 64.
P. 87.			
	1045.	+ 32. 33.	33784. 85.
	1046.	- 32. 34.	33827. 64.
	1047.	+ 32. 36.	33880. 92.
	1048.	- 32. 37.	33923. 76.
	1049.	+ 32. 39.	33977. 11.
	1050.	- 32. 40.	34020. 00.
	1051.	+ 32. 42.	34073. 42.
	1052.	- 32. 43.	34116. 36.
	1053.	+ 32. 45.	34169. 85.
	1054.	+ 32. 47.	34223. 38.
	[illegible]	- 32. 48.	34266. 40.
	1056.	+ 32. 50.	34320. 00.
P. 88.			
	1057.	- 32. 51.	34363. 07.
	1058.	+ 32. 53.	34416. 74.
	1059.	- 32. 54.	34459. 86.
	1060.	+ 32. 56.	34513. 60.
B. 53.			
	1061.	- 32. 57.	34556. 77.
	1062.	+ 32. 59.	34610. 58.
	1063.	- 32. 60.	34653. 80.
	1064.	+ 32. 62.	34707. 68.
	1065.	- 32. 63.	34750. 95.
	1066.	+ 32. 65.	34804. 90.
	1067.	- 32. 66.	34848. 22.
	1068.	- 32. 68.	34902. 24.
P. 89.			
	1069.	+ 32. 70.	34956. 30.
	1070.	- 32. 7[illegible].	34999. 70.
	1071.	+ 32. 7[illegible].	35053. 83.
	1072.	- 32. 74.	35097. 28.
	1073.	+ 32. 76.	35151. 48.
	1074.	- 32. 77.	35194. 98.
	1075.	+ 32. 79.	35249. 25.
	1076.	- 32. 80.	35292. 80.
	1077.	+ 32. 82.	35347. 14.
	1078.	- 32. 83.	35390. 74.
	1079.	+ 32. 85.	35445. 15.
P. 90.	1080.	- 32. 86.	35488. 80.
B. 54.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1081.	+ 32. 88.	35543. 28.
	1082.	- 32. 89.	35586. 98.
	1083.	+ 32. 91.	35641. 53.
	1084.	- 32. 92.	35685. 28.
	1085.	+ 32. 94.	35739. 90.
	1086.	- 32. 95.	35783. 70.
	1087.	+ 32. 97.	35838. 39.
	1088.	- 32. 98.	35882. 24.
	1089.	33. 00.	35937. 00.
	1090.	+ 33. 02.	35991. 80.
	1091.	- 33. 03.	36035. 73.
	1092.	+ 33. 05.	36090. 60.
P. 91.			
	1093.	- 33. 06.	36134. 58.
	1094.	+ 33. 08.	36189. 52.
	1095.	- 33. 09.	36233. 55.
	1096.	+ 33. 11.	36288. 56.
	1097.	- 33. 12.	36332. 64.
	1098.	+ 33. 14.	36387. 72.
	1099.	- 33. 15.	36431. 85.
	1100.	+ 33. 17.	36487. 00.
B. 55.			
	1101.	- 33. 18.	36531. 18.
	1102.	+ 33. 20.	36586. 40.
	1103.	- 33. 21.	36630. 63.
	1104.	+ 33. 23.	36685. 92.
P. 92.			
	1105.	- 33. 24.	36730. 20.
	1106.	+ 33. 26.	36785. 56.
	1107.	- 33. 27.	36829. 89.
	1108.	+ 33. 29.	36885. 32.
	1109.	- 33. 30.	36929. 70.
	1110.	+ 33. 32.	36985. 20.
	1111.	- 33. 33.	37029. 63.
	1112.	+ 33. 35.	37085. 20.
	1113.	- 33. 36.	37129. 68.
	1114.	+ 33. 38.	37185. 32.
	1115.	- 33. 39.	37229. 85.
	1116.	+ 33. 41.	37285. 56.
P. 93.			
	1117.	- 33. 42.	37330. 14.
	1118.	+ 33. 44.	37385. 92.
	1119.	- 33. 45.	37430. 55.
	1120.	+ 33. 47.	37486. 40.
B. 56.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1121.	- 33. 48.	37531. 08.
	1122.	+ 33. 50.	37587. 00.
	1123.	- 33. 51.	37631. 73.
	1124.	+ 33. 53.	37687. 72.
	1125.	- 33. 54.	37732. 50.
	1126.	+ 33. 56.	37788. 56.
	1127.	- 33. 57.	37833. 39.
	1128.	+ 33. 59.	37889. 52.
P.94.			
	1129.	- 33. 60.	37934. 40.
	1130.	+ 33. 6[illegible].	37990. 60.
	1131.	- 33. 63.	38035. 53.
	1132.	+ 33. 65.	380[illegible]1. 80.
	1133.	- 33. 66.	38136. 78.
	1134.	- 33. 67.	38181. 78.
	1135.	+ 33. 69.	38238. 15.
	1136.	- 33. 70.	38283. 20.
	1137.	+ 33. 72.	38339. 64.
	1138.	- 33. 73.	38384. 74.
	1139.	+ 33. 75.	38441. 25.
P.95. B.57.	1140.	- 33. 76.	38486. 40.
	1141.	+ 33. 78.	38542. 98.
	1142.	- 33. 79.	38588. 18.
	1143.	+ 33. 81.	38644. 83.
	1144.	- 33. 82.	38690. 02.
	1145.	+ 33. 84.	38746. 80.
	1146.	- 33. 85.	38792. 10.
	1147.	+ 33. 87.	38848. 89.
	1148.	- 33. 88.	38894. 24.
	1149.	+ 33. 90.	38951. 10.
	1150.	- 33. 91.	38996. 50.
	1151.	+ 33. 93.	39053. 43.
	1152.	- 33. 94.	39098. 88.
P.96.			
	1153.	+ 33. 96.	39155. 88.
	1154.	- 33. 97.	39201. 38.
	1155.	+ 33. 99.	39258. 45.
	1156.	34. 00.	39304. 00.
	1157.	- 34. 01.	39349. 57.
	1158.	+ 34. 03.	39406. 74.
	1159.	- 34. 04.	39452. 36.
	1160.	+ 34. 06.	39509. 60.
P.58.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1161.	- 34. 07.	395[illegible]5. 27.
	1162.	+ 34. 09.	39612. 58.
	1163.	- 34. 10.	3965[illegible]. 30.
	1164.	+ 34. 12.	3[illegible]715. 68.
P.97.			
	1165.	- 34. 13.	39761. 45.
	1166.	+ 34. 15.	[illegible]9818. 90.
	1167.	- 34. 16.	39864. 72.
	1168.	+ 34. 18.	39922. 24.
	1169.	- 34. 19.	39968. 11.
	1170.	+ 34. 21.	40025. 70.
	1171.	+ 34. 22.	40[illegible]71. 62.
	1172.	- 34. 23.	401[illegible]7. 56.
	1173.	+ 34. 25.	40175. 25.
	1174.	- 34. 26.	40221. 24.
	1175.	+ 34. 28.	40279. 00.
P.98.	1176.	- 34. 29.	40325. 04.
	1177.	+ 34. 31.	40382. 87.
	1178.	- 34. 32.	40428. 96.
	1179.	+ 34. 34.	40486. 86.
	1180.	- 34. 35.	40533. 00.
B.59.			
	1181.	+ 34. 37.	40590. 97.
	1182.	- 34. 38.	[illegible]0637. 16.
	1183.	- 34. 39.	40683. 37.
	1184.	+ 34. 41.	40741. 44.
	1185.	- [illegible]4. 42	40787. 70
	1186.	+ 34. 44	40845. 84
	1187.	- 34. 45.	40892. 15
	1188.	+ 34. 47.	40[illegible]50. 36.
P.99.			
	1189.	- 34. 48.	40996. 72.
	1190.	+ 34. 50.	41055. 00.
	1191.	- 34. 51.	41101. 41.
	1192.	+ 34. 53.	41159. 76.
	1193.	+ 34. 54.	41206. 22.
	1194.	- 34. 55.	41252. 70.
	1195.	+ 34. 5[illegible].	41311. 15.
	1196.	- 34. 58.	41357. 68.
	1197.	+ 34. 60.	41416. 20.
	1198.	- 34. 61.	41462. 78.
	1199.	+ 34. 63.	41521. 37.
P. 100. B. 60.	1200.	- 34. 64.	41568. 00.

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1201.	+34.66.	41626.66.
	1202.	+34.67.	41673.34.
	1203.	+34.68.	41720.04.
	1204.	+34.70.	41778.80.
	1205.	-34.71.	41825.55.
	1206.	+34.73.	41884.38.
	1207.	-34.74.	41931.18.
	1208.	+34.76.	41990.08.
	1209.	-34.77.	42036.93.
	1210.	+34.79.	42095.90.
	1211.	+34.80.	42142.80.
	1212.	-34.81.	42189.72.
P.101.			
	1213.	+34.83.	42248.79.
	1214	-34.84.	42295.76.
	1215.	+34.86.	42354.90.
	1216.	+34.87.	42401.92.
	1217.	+34.89.	42461.13.
	1218.	+34.90.	42508.20.
	1219.	-34.91.	42555.29.
	1220.	+34.93.	42614.60.
B.61.			
	1221.	-34.94.	42661.74.
	1222.	+34.96.	42721.12.
	1223.	-34.97.	42768.31.
	1224.	+34.99.	42827.76.
P.102.			
	1225.	35.00.	42875.00.
	1226.	-35.01.	42922.26.
	1227.	+35.03.	42981.81.
	1228.	-35.04.	43029.12.
	1229.	+35.06.	43088.74.
	1230.	-35.07.	43136.10.
	1231.	+35.09.	43195.79.
	1232.	+35.10.	43243.20.
	1233.	-35.11.	43290.63.
	1234.	+35.13.	43350.42.
	1235.	-35.14.	43397.90.
	1236.	+35.16.	43457.76.
P.103.			
	123[illegible].	-35.17.	43515.29.
	1238.	+35.19.	43565.22.
	1239.	+35.20.	43612.80.
	1240.	-35.21.	43660.40.
B.62.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1241.	+35.23.	43720.43.
	1242.	-35.24.	43768.08.
	1243.	+35.26.	43828.18.
	1244	-35.27.	43875.88.
	1245.	-35.28.	43923.60.
	1246.	+35.30.	43983.80.
	1247.	-35.31.	44031.57.
	1248.	+35.33.	44091.84.
P.104.			
	1249.	-35.34.	44139.66.
	1250.	+35.86.	44200.00.
	1251.	+35.37.	44247.87.
	1252.	-35.38.	44295.76.
	1253.	+35.40.	44356.20.
	1254	-35.41.	44404.14.
	1255.	+35.43.	44464.65.
	1256.	-35.44.	44512.64.
	1257.	-35.45.	44560.65.
	1258.	+35.47.	44621.26.
	1259.	-35.48.	44669.32.
	1260.	+35.50.	44730.00.
P. 105. B. 63.			
	1261.	-35.51.	44778.11.
	1262.	-35.52.	44826.24.
	1263.	+35.54.	44887.02.
	1264.	-35.55.	44935.20.
	1265.	+35.57.	44996.0[illegible].
	1266.	-35.58.	45044.28.
	1267.	-35.59.	45092.53.
	1268.	+35.61.	45153.48.
	1269.	-35.62.	45201.78.
	1270.	+35.64.	45262.80.
	1271.	-35.65.	45311.15.
	1272.	+35.67.	45372.24.
P.106.			
	1273.	+35.68.	45420.64.
	1274.	-35.69.	45469.06.
	1275.	+35.71.	45530.25.
	1276.	-35.72.	45578.72.
	1277.	+35.74.	45639.98.
	1278.	+35.75.	45688.50.
	1279.	-35.76.	45737.04.
	1280.	+35.78.	45798.40.
B.64.			

Al.

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1281.	-35.79.	45846.99.
	1282.	+35.81.	45908.42.
	1283.	+35.82.	45957.06.
	1284.	-35.83.	46005.72.
P.107.			
	1285.	+35.85.	46067.25.
	1286.	-35.86.	46115.96.
	1287.	-35.87.	46164.69.
	1288.	+35.89.	46226.32.
	1289.	-35.90.	46275.10.
	1290.	+35.92.	46336.80.
	1291.	-35.93.	46385.63.
	1292.	-35.94.	46434.48.
	1293.	+35.96.	46496.28.
	1294.	-35.97.	46545.18.
	1295.	+35.99.	46607.05.
	1296.	36.00.	46656.00.
P.108.			
	1297.	-36.01.	46704.97.
	1298.	+36.03.	46766.94.
	1299.	-36.04.	46815.96.
	1300.	+36.06.	46878.00.
B.69.			
	1301.	+36.07.	46927.07.
	1302.	-36.08.	46976.16.
	1303.	+36.10.	47038.30.
	1304.	-36.11.	47087.44.
	1305.	+36.13.	47149.65.
	1306.	+36.14	47198.84.
	1307.	-36.15.	47248.05.
	1308.	+36.17.	47310.36.
P.109.			
	1309.	-36.18.	47359.62.
	1310.	-36.19.	47408.90.
	1311.	+36.21.	47471.31.
	1312.	-36.22.	47520.64.
	1313.	+36.24.	47583.12.
	1314.	+36.25.	47632.50.
	1315.	-36.26.	47681.90.
	1316.	+36.28.	47744.48.
	1317.	-36.29.	47793.93.
	1318.	-36.30.	47843.40.
	1319.	+36.32.	47906.08.
	1320.	-36.33.	47955.60.
P.110. B. 66.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1321.	+36.35.	48018.35.
	1322.	+36.36.	48067.92.
	1323.	-36.37.	48117.51.
	1324.	+36.39.	48180.36.
	1325.	-36.40.	48230.00.
	1326.	-36.41.	48279.66.
	1327.	+36.43.	48342.61.
	1328.	-36.44.	48392.32.
	1329.	+36.46.	48455.34.
	1330.	+36.47.	48505.10.
	1331.	-36.48.	48554.88.
	1332.	+36.50.	48618.00.
P.111.			
	1333.	-36.51.	48667.83.
	1334.	-36.52.	48717.68.
	1335.	+36.54.	48780.90.
	1336.	+36.55.	48830.80.
	1337.	+36.57.	48894.09.
	1338.	+36.58.	48944.04.
	1339.	-36.59.	48994.01.
	1340.	+36.61.	49057.40.
B.67.			
	1341.	+36.62.	49107.42.
	1342.	-36.63.	49157.46.
	1343.	+36.65.	49220.95.
	1344.	-36.66.	49271.04.
P.112.			
	1345.	-36.67.	49321.15.
	1346.	+36.69.	49384.74.
	1347.	-36.70.	49434.90.
	1348.	-36.71.	49485.08.
	1349.	+36.73.	49548.77.
	1350.	-36.74.	49599.00.
	1351.	+36.76.	49662.76.
	1352.	+36.77.	49713.04.
	1353.	-36.78.	49763.34.
	1354.	+36.80.	49827.20.
	1355.	-36.81.	49877.55.
	1356.	-36.82.	49927.92.
P.113.			
	1357.	+36.84.	49991.88.
	1358.	-36.85.	50042.30.
	1359.	-36.86.	50092.74.
	1360.	+36.88.	50156.80.
B.68.			

Al-

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1361.	-36.89.	50207.29.
	1362.	+36.91.	50271.42.
	1363.	+36.92.	50321.96.
	1364.	-36.93.	50372.52.
	1365.	+36.95.	50436.75.
	1366.	+36.96.	50487.36.
	1367.	+36.97.	50537.99.
	1368.	+36.99.	50602.32.
P.114.			
	1369.	37.00.	50653.00.
	1370.	-37.01.	50703.70.
	1371.	+37.03.	50763.13.
	1372.	-37.04.	30818.88.
	1373.	-37.05.	50869.65.
	1374.	+37.07.	50934.18.
	1375.	-37.08.	50985.00.
	1376.	-37.09.	51035.84.
	1377.	+37.11.	51100.47.
	1378.	-37.12.	51151.36.
	1379.	-37.13.	51202.27.
P.115.	1380.	+37.15.	51267.00.
B. 69.			
	1381.	-37.16.	51317.96.
	1382.	+37.18.	51382.76.
	1383.	+37.19.	51433.77.
	1384.	-37.20.	51484.80.
	1385.	+37.22.	51549.70.
	1386.	+37.23.	51600.78.
	1387.	-37.24.	51651.88.
	1388.	+37.26.	51716.88.
	1389.	+37.27.	51768.03.
	1390.	-37.28.	51819.20.
	1391.	+37.30.	51884.30.
	1392.	+37.31.	51935.52.
P.116.	1393.	-37.32.	51986.76.
	1394.	+37.34.	52051.96.
	1395.	+37.35.	52103.25.
	1396.	-37.36.	52154.56.
	1397.	+37.38.	52219.86.
	1398.	+37.39.	52271.22.
	1399.	-37.40.	52322.60.
	1400.	+37.42.	52388.00.
B. 70.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1401.	+37.43.	52439.43.
	1402.	-37.44.	52490.88.
	1403.	+37.46.	52556.38.
	1404.	+37.47.	52607.88.
P.117.			
	1405.	-37.48.	52659.40.
	1406.	+37.50.	52725.00.
	1407.	+37.51.	52776.57.
	1408.	-37.52.	52828.16.
	1409.	+37.54.	52893.86.
	1410.	+37.55.	52945.50.
	1411.	-37.56.	529[illegible]7.16.
	1412.	+37.58.	53062.96.
	1413.	+37.59.	53114.67.
	1414.	-37.60.	53166.40.
	1415.	+37.62.	53232.30.
	1416.	+37.63.	53284.08.
P.118.			
	1417.	-37.64.	53335.88.
	1418.	+37.66.	53401.88.
	1419.	+37.67.	53453.73.
	1420.	-37.68.	53505.60.
B. 71.			
	1421.	+37.70.	53571.70.
	1422.	+37.71.	53623.62.
	1423.	-37.72.	53675.56.
	1424.	+37.74.	53741.76.
	1425.	+37.75.	[illegible]3793.75.
	1426.	-37.76.	53845.76.
	1427.	+37.78.	53912.06.
	1428.	+37.79.	53964.12.
P.119.			
	1429.	-37.80.	54013.20.
	1430.	+37.82.	54082.60.
	1431.	+37.83.	54134.73.
	1432.	-37.84.	54186.98.
	1433.	-37.85.	54239.05.
	1434.	+3[illegible].87.	54305.58.
	1435.	-37.88.	54357.80.
	1436.	-37.89.	54410.04.
	1437.	+37.91.	[illegible]4476.67.
	1438.	-37.92.	54528.96.
	1439.	-37.93.	54581.27.
	1440.	+37.05.	54648.00.
P.120.			
B. 72.			

Al-

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1441.	-37.96.	54700.36.
	1442.	-37.97.	54752.74.
	1443.	+37.99.	54819.57.
	1444.	38.00.	54872.00.
	1445.	-38.01.	54924.45.
	1446.	+38.03.	54991.38.
	1447.	+38.04.	55043.88.
	1448.	-38.05.	55096.40.
	1449.	+38.07.	55163.43.
	1450.	+38.08.	55216.00.
	1451.	-38.09.	55268.59.
	1452.	+38.11.	55335.72.
P.121.			
	1453.	+38.12.	55388.36.
	1454.	-38.13.	55441.02.
	1455.	-38.14.	55493.70.
	1456.	+38.16.	55560.96.
	1457.	-38.17.	55613.69.
	1458.	-38.18.	55666.44.
	1459.	+38.20.	55733.80.
	1460.	+38.21.	55786.60.
B. 73.			
	1461.	-38.22.	55839.42.
	1462.	+38.24.	55906.88.
	1463.	+38.25.	55959.75.
	1464.	-38.26.	56012.64.
P.122.			
	1465.	+38.28.	56080.20.
	1466.	+38.29.	56133.14.
	1467.	-38.30.	56186.10.
	1468.	-38.31.	56239.08.
	1469.	+38.33.	56306.77.
	1470.	-38.34.	56359.80.
	1471.	-38.35.	56412.85.
	1472.	+38.37.	56480.64.
	1473.	+38.38.	56533.74.
	1474.	-38.39.	56586.86.
	1475.	+38.41.	56654.75.
	1476.	+38.42.	56707.92.
P.123.			
	1477.	-38.43.	56761.11.
	1478.	-38.44.	56814.32.
	1479.	+38.46.	56882.34.
	1480.	-38.47.	56935.60.
B. 74.			

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1481.	-38.48.	56988.88.
	1482.	+38.50.	57057.00.
	1483.	+38.51.	57110.33.
	1484.	-38.52.	57163.68.
	1485.	+38.54.	57231.90.
	1486.	+38.55.	57285.30.
	1487.	-38.56.	57338.72.
	1488.	-38.57.	57392.16.
P.124.			
	1489.	+38.59.	57460.51.
	1490.	-38.60.	57514.00.
	1491.	-38.61.	57567.51.
	1492.	+38.63.	57635.96.
	1493.	+38.64.	57689.52.
	1494.	-38.65.	57743.10.
	1495.	+38.67.	57811.65.
	1496.	+38.68.	57865.28.
	1497.	-38.69.	57918.93.
	1498.	-38.70.	57972.60.
	1499.	+38.72.	58041.28.
	1500.	+38.73.	58095.00.
P.125. B. 75.			
	1501.	-38.74.	58148.74.
	1502.	+38.76.	58217.52.
	1503.	+38.77.	58271.31.
	1504.	-38.78.	58325.12.
	1505.	-38.79.	58378.85.
	1506.	+38.81.	58447.86.
	1507.	-38.82.	58501.74.
	1508.	-38.83.	58555.64.
	1509.	+38.85.	58624.65.
	1510.	-38.86.	58678.60.
	1511.	-38.87.	58732.57.
	1512.	-38.88.	58786.56.
P.126.			
	1513.	+38.90.	58855.70.
	1514.	-38.91.	58909.74.
	1515.	-38.92.	58963.80.
	1516.	+38.94.	59033.04.
	1517.	+38.95.	59087.15.
	1518.	-38.96.	59141.28.
	1519.	-38.97.	59195.43.
	1520.	+38.99.	59264.80.
B. 76.			

Al-

	Altezze.	Radici.	Prodotti.
	1521.	39.00.	59319.00.
	1522.	-39.01.	59373.22.
	1523.	+39.03.	59442.69.
	1524.	+39.04.	59496.96.
P.127.			
	1525.	-39.05.	59551.25.
	1526.	-39.06.	59605.56.
	1527.	+39.08.	59675.16.
	1528.	+39.09.	59729.52.
	1529.	-39.10.	59783.90.
	1530.	+39.12.	59853.6[illegible]
	1531.	+39.13.	59908.03.
	1532.	-39.14.	59962.48.
	1533.	-39.15.	60016.95.
	1534.	+39.17.	60086.78.
	1535.	+39.18.	60141.30.
	1536.	-39.19.	60195.84.
P.128.			
	1537.	-39.20.	60250.40.
	1538.	+39.22.	60320.36.
	1539.	-39.23.	60374.97.
	1540.	-39.24.	60429.60.
B. 77.			
	1541.	+39.26.	60499.66.
	1542.	+39.27.	60554.34.
	1543.	-39.28.	60609.04.
	1544.	-39.29.	60663.76.
	1545.	+39.31.	60723.95.
	1546.	+39.32.	60788.72.
	1547.	-39.33.	60843.51.
	1548.	-39.34.	60898.32.
P.129.			
	1549.	+39.36.	60968.64.
	1550.	-39.37.	61023.50.
	1551.	-39.38.	61078.38.
	1552.	+39.40.	61148.80.
	1553.	+39.41.	61203.73.
	1554.	-39.42.	61258.68.
	1555.	-39.43.	61313.65.
	1556.	+39.45.	61384.20.
	1557.	+39.46.	61439.22.
	1558.	-39.47.	61494.26.
	1559.	-39.48.	61549.32.
	1560.	+39.50.	61620.00.
P.130. B. 78.			

	Altezze.	Radici:	Prodotti.
	1561.	+39.51.	61675.11.
	1562.	-39.52.	61730.24
	1563.	-39.53.	61785.39.
	1564.	+39.55.	61856.20.
	1565.	-39.56.	61911.40.
	1566.	-39.57	61966.62.
	1567.	+39.59.	62037.53.
	1568.	+39.60.	62092.80.
	1569.	-39.61.	62148.09.
	1570.	-39.62.	62203.40.
	1571.	+39.64.	62274.44.
	1572.	+39.65.	62329.80.
P.131.			
	1573.	-39.66.	62385.18.
	1574.	-39.67.	62440.58.
	1575.	-39.69.	62511.75.
	1576.	+39.70.	62627.20.
	1577.	-39.71.	62622.67.
	1578.	-39.72.	62678.16.
	1579.	+39.74.	62749.46.
	1580.	+39.75.	62805.00.
B. 79.			
	1581.	-39.76.	62860.56.
	1582.	-39.77.	62916.14.
	1583.	+39.79.	62987.57.
	1584.	+39.80.	63043.20.
P.132.			
	1585.	-39.81.	63098.85.
	1586.	-39.82.	63154.52.
	1587.	+39.84.	63226.08.
	1588.	+39.85.	63281.80.
	1589.	-39.86.	63337.54.
	1590.	-39.87.	63393.30.
	1591.	+39.89.	63464.99.
	1592.	+39.90.	63520.80.
	1593.	-39.91.	63576.63.
	1594.	-39.92.	63632.48.
	1595.	+39.94.	63704.30.
	1596.	+39.95.	63760.20.
P.133.			
	1597.	-39.96.	63816.12.
	1598.	-39.97.	63872.06.
	1599	+39.99.	63944.01.
	1600.	40.00.	[illegible]4000.00.
B. 80.			

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1601.	-40.01	64056.01.
1602.	-40.02	64112.04.
1603.	+40.04	64184.12.
1604.	+40.05.	64240.20.
1605.	-40.06.	64296.30.
1606.	-40.07.	64352.42.
1607.	+40.09.	64424.63.
1608.	+40.10.	64480.80.

P.134.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1609.	-40.11.	64536.99.
1610.	-40.12.	64593.20.
1611.	+40.14.	64665.54.
1612.	+40.15.	64721.80.
1613.	-40.16.	64778.08.
1614.	-40.17.	64834.38.
1615.	+40.19.	64906.85.
1616.	+40.20.	64963.20.
1617.	-40.21.	65019.57.
1618.	-40.22.	65075.96.
1619.	+40.24.	65148.56.
P.135. B.81. 1620.	+40.25.	65205.00.
1621.	-40.26.	65261.46.
1622.	-40.27.	65317.94.
1623.	+40.29.	65390.67.
1624.	+40.30.	65447.20.
1625.	-40.31.	65503.75.
1626.	-40.32.	65560.32.
1627.	+40.34.	65633.18.
1628.	+40.35.	65689.80.
1629.	-40.36.	65746.44.
1630.	-40.37.	65803.10.
1631.	+40.39.	65876.09.
1632.	+40.40.	65932.80.

P.136.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1633.	-40.41.	65989.53.
1634.	-40.42.	66046.28.
1635.	+40.44.	66119.40.
1636.	+40.45.	66176.20.
1637.	+40.46	66233.02.
1638.	-40.47.	66289.86.
1639.	-40.48.	66346.72.
1640.	+40.50.	66420.00.

B.82.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1641.	+40.51.	66476.91.
1642.	-40.52.	66533.84.
1643.	-40.53.	66590.79.
1644.	+40.55.	66664.20.

P.137.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1645.	+40.56.	66721.20.
1646.	-40.57.	66778.22.
1647.	-40.58.	66835.26.
1648.	+40.60.	66908.80.
1649.	+40.61.	66965.89.
1650.	-40.62.	67023.00.
1651.	-40.63.	67080.13.
1652.	-40.64.	67137.28.
1653.	+40.66.	67210.98.
1654.	+40.67.	67268.18.
1655.	-40.68.	67325.40.
1656.	-40.69.	67382.64.

P.138.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1657.	+40.71.	67456.47.
1658.	+40.72.	67513.76.
1659.	-40.73.	67571.07.
1660.	-40.74.	67628.40.

B.83.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1661.	+40.76.	67702.36.
1662.	+40.77.	67759.74.
1663.	+40.78.	67817.14.
1664.	-40.79.	67874.56.
1665.	-40.80.	67932.00.
1666.	+40.82.	68006.12.
1667.	+40.83.	68063.61.
1668.	-40.84.	68121.12.

P.139.

Altezze.	Radici.	Prodotti.
1669.	-40.85.	68178.65.
1670.	+40.87.	68252.90.
1671.	+40.88.	68310.48.
1672.	-40.89.	68368.08.
1673.	-40.90.	68425.70.
1674.	-40.91.	68483.34.
1675.	+40.93.	68557.75.
1676.	+40.94.	68615.44.
1677.	-40.95.	68673.15.
1678.	-40.96.	68730.88.
1679.	+40.98.	68805.42.
1680.	+40.99	68863.20.

P.140. B.84.

Al-

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1681.	41.00.	68921.00.
	1682.	-41.01.	68978.82.
	1683.	-41.02.	69036.66.
	1684.	+41.04.	69111.36.
	1685.	+41.05.	69169.25.
	1686.	-41.06.	69227.16.
	1687.	-41.07.	69285.09.
	1688.	+41.09.	69359.92.
	1689.	+41.10.	69417.90.
	1690.	+41.11.	69475.90.
	1691.	-41.12.	69533.92.
	1692.	-41.13.	69591.96.
P.141.			
	1693.	+41.15.	69666.95.
	1694.	+41.16.	69725.04.
	1695.	-41.17.	69783.15.
	1696.	-41.18.	69841.28.
	1697.	-41.19.	69899.43.
	1698.	+41.21.	69974.58.
	1699.	+41.22.	70032 78.
	1700.	-41.23.	70091.00.
B. 85.			
	1701.	-41.24.	70149.24.
	1702.	+41.26.	702 4.52.
	1703.	+41.27.	70282.81.
	1704.	+41.28.	70341.12.
P.142.			
	1705.	-41.29.	70399.45.
	1706.	-41.30.	70457.80.
	1707.	+41.32.	70533.24.
	1708.	+41.33.	70591.64.
	1709.	-41.34.	70650.06.
	1710.	-41.35.	70708.50.
	1711.	-41.36.	70766.96.
	1712.	+41.38.	70842.56.
	1713.	+41.39.	70901.07.
	1714	-41.40.	70959.60.
	1715.	-41.41.	71018.15.
	1716.	-41.42.	71076.72.
P.143.			
	1717.	+41.44.	71152.48.
	1718.	+41.45.	71211.10.
	1719.	-41.46.	71269.74.
	1720.	-41.47.	71328.40.
B.86.			

	Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
	1721.	-41.48.	71387.08.
	1722.	+41.50.	71463.00.
	1723.	+41.51.	71521.73.
	1724.	-41.52.	71580.48.
	1725.	-41.53.	71639.25.
	1726.	+41.55.	71715.30.
	1727.	+41.56.	71774.12.
	1728.	+41.57.	71832.96.
P.144.			
	1729.	-41.58.	71891.82.
	1730.	-41.59.	71950.70.
	1731.	+41.61.	72026.91.
	1732.	+41.62.	72085.84.
	1733.	+41.63.	72144.79.
	1734.	-41.64.	72203.76.
	1735.	-41.65.	72262.75.
	1736.	+41.67.	72339.12.
	1737.	+41.68.	72398.16.
	1738.	+41.69.	72457.22.
	1739.	-41.70.	72516.30.
	1740.	-41.71.	72575.40.
P.145. B. 87.			
	1741.	+41.73.	72651.93.
	1742.	+41.74	72711.08.
	1743.	+41.75.	72770.25.
	1744.	-41.76.	72829.44.
	1745.	-41.77.	72888.65.
	1746.	+41.79.	72965.34.
	1747.	+41.80.	73024.60.
	1748.	+41.81.	73083.88.
	1749.	-41.82.	73143.18.
	1750.	-41.83.	73202.50.
	1751.	-41.84	73261.84.
	1752.	+41.86.	73338.72.
P.146.			
	1753.	+41.87.	73398.11.
	1754.	-41.88.	73457.52.
	1755.	-41.89.	73516.95.
	1756.	-41.90.	73576.40.
	1757.	+41.92.	73653.44.
	1758.	+41.93.	73712.94.
	1759.	-41.94.	73772.46.
	1760.	-41.95.	73832.00.
B.88.			

Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
1761.	-41.96.	73891.56.
1762.	+41.98.	73977.76.
1763.	+41.99.	74037.37.
1764.	42.00.	74088.00.

P. 147.

Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
1765.	-42.01.	74147.65.
1766.	-42.02.	74207.32.
1767.	+42.04.	74284.68.
1768.	+42.05.	74344.40.
1769.	+42.06.	74404.14.
1770.	-42.07.	74463.90.
1771.	+42.08.	74523.68.
1772.	+42.10.	74601.20.
1773.	+42.11.	74661.03.
1774.	+42.12.	74720.88.
1775.	-42.13.	74780.75.
1776.	-42.14.	74840.64.

P. 148.

Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
1777.	-42.15.	74900.55.
1778.	+42.17.	74978.26.
1779.	+42.18.	75038.22.
1780.	-42.19.	75098.20.

B. 89.

Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
1781.	-42.20.	75158.20.
1782.	-42.21.	75218.22.
1783.	+42.23.	75296.09.
1784.	+42.24.	75356.16.
1785.	+42.25.	75416.25.
1786.	-42.26.	75476.36.
1787.	-42.27.	75536.49.
1788.	-42.28.	75596.6[illegible].

P. 149.

Altezze.	*Radici.*	*Prodotti.*
1789.	+42.30.	75674.70.
1790.	+42.31.	75734.90.
1791.	-42.32.	75795.12.
1792.	-42.33.	75855.36.
1793.	-42.34.	75915.62.
1794.	+42.36.	75993.84.
1795.	+42.37.	76054.15.
1796.	+42.38.	76114.[illegible]8.
179[illegible].	-42.39.	75174.83.
1798.	-42.40.	75235.20.
1799.	-42.41.	75295.59.
1800.	+42.43.	76374.00.

P. 150.
B. 90.



IN-

INDICE

De' Capitoli dell' Opera.

LIBRO I.

De principj più universali, concernenti il moto de' fiumi principalmente di fondo orizzontale, loro flessuosità, confluenze, diramazioni, e varie velocità, prescindendo da qualunque particolare ipotesi circa la stessa.

LIBRO II.

Del moto, velocità, e figura de' fluidi nell' uscire da' vasi, e del corso loro per canali inclinati, e della pressione del fondo, e delle ripe, o altri ostacoli opposti alla direzione di essi.